Usean vakuutetun henkivakuutukset

Kati Suontausta

Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

24. syyskuuta 2012

Sisältö

1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma käsittelee henkivakuutuksia niissä tapauksissa, kun kaksi tai useampi henkilö ottaa yhteisen elämän- tai kuolemanvaravakuutuksen. Tyypillisimmillään usean vakuutetun henkivakuutuksissa vakuutettuja on kaksi. Yleensä kyseessä on pariskunta, joka haluaa ottaa yhteisen vakuutuksen kuoleman varalta. Heillä saattaa olla esimerkiksi yhteinen asuntolaina tai lapsia. Otettava kuolemanvaravakuutus voi olla esimerkiksi sellainen, että se kattaa mahdollisen kuoleman sattuessa vainajan osuuden asuntovelasta. Mahdollista on myös, että vakuutus otetaan siten, että mikäli pariskunnasta toisella on selvästi paremmat tulot kuin toisella, turvaa vakuutus parempituloisen puolison kuoleman sattuessa eloon jääneen ja mahdollisten lasten toimeentulon.

Tässä tutkielmassa oletetaan, että vakuutettujen elinajat ovat toisistaan riippumattomia. Tämä oletus ei todellisuudessa välttämttä ole totta, sillä esimerkiksi elintavat vaikuttavat vakuutetun elinaikaan. Monesti esimerkiksi pariskunnilla on samanlainen ruokavalio. Puolison kuolema saattaa myös vaikuttaa eloon jääneen vakuutetun elämänlaatuun ja -iloon.

Tässä pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan usean vakuutetun henkivakuutuksia kuitenkin myös niissä tapauksissa, joissa vakuutettuja on enemmän kuin kaksi. Tällasia vakuutuksia voisivat ottaa esimerkiksi yhtiökumppanit, joista jokaisella on yrityksessä oma vastuualueensa. Tällöin yhden yhtiökumppanin kuoleman sattuessa yrityksellä olisi paremmat resurssit palkata mahdollisimman pian työntekijä tekemään kyseinen työ tai kouluttautua itse vastuualueen osaajaksi.

Aluksi tarkastellaan korkoutuvuuden ja kuolevuuden peruskäsitteitä sekä niiden ominaisuuksia. Lisäksi tarkastellaan vakuutetun jäljellä olevaa elinaikaa satunnaismuuttujana ja laajennetaan käsite usealle vakuutetulle.

Tässä työssä lähdetään usein liikkeelle elämänvaravakuutuksesta, josta sitten edetään kuolemanvaravakuutukseen. Työssä tutustutaan ensin elämänvaravakuutukseen kahden vakuutetun tapauksessa ja yleisessä N:n vakuutetun tapauksessa. Tämän jälkeen käsitellään kuolemanvaravakuutus kahden ja usean vakuutetun tapauksissa. Molemmissa tapauksissa johdan aluksi nettokertamaksut kaikille näille vakuutuksille.

Tämän jälkeen tutustumme erityisesti yhtiön kannalta tärkeään vastuuvelan käsitteeseen. Vastuuvelan avulla tarkastellaan yhtiön velkaa vakuutuksen ottajalle. Se siis kuvaa sitä, kuinka paljon yhtiöllä tulisi olla varallisuutta, jotta se selviäisi vastuistaan. Todellisuudessa yhtiöillä on myös erilaisia kiinteitä kuluja, jotka tulee ottaa huomioon vastuuvelkaa laskettaessa. Näitä käsitellään tämän tutkielman kappaleessa 9, jossa tarkastellaan kahden hengen elämänvaravakuutusta.

Vastuuvelan määrittelemisen jälkeen johdamme Thielen yhtälön, joka on tärkeä apuväline yhtiölle, kun tarkastellaan vastuuvelan muutoksia. Tässä tutkielmassa Thielen yhtälön johtamiseen käytetään virtausajattelua, jonka avulla on mielestäni helppo johtaa Thielen yhtälö erilaisille vakuutuksille.

Viimeisessä kappaleessa tutustumme usean vakuutetun henkivakuutuksen mallintamiseen Markov -prosessin avulla. Tarkastelemme tarkemmin kahden vakuutetun kuolemanvaravakuutusta käyttäen apuna intensiteettimallia ja lopuksi johdamme näiden avulla vakuutuksen nettokertamaksun.

2 Korkoutuvuus

Tarkastellaan aluksi koron määräytymistä.[1] Talletetaan hetkellä 0 tilille rahaa määrä $F = F(0)$ ja oletetaan, että sitä ei oteta tililtä pois. Hetkellä 1 rahaa on tilillä määrä $F(1) = (1+i)F$, jossa $i \in [0,1]$. Kutsutaan suuretta i vuosikoroksi. Oletetaan, että korkoa kertyy niin kutsutun korkoa korolle -periaatteen mukaisesti. Tällöin

$$F(t) = (1+i)^t F.$$

Oletetaan, että $m \in \mathbf{N}$. Tällöin $\frac{1}{m}$-mittaisen ajanjakson ajalta maksetaan korkoa kertoimella $(1+i)^{\frac{1}{m}}$. Tällöin on voimassa yhtälö

$$(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m = 1 + i,$$

jossa suuretta $i^{(m)}$ kutsutaan m. osavuoden nimelliskoroksi.

Kun $m \to \infty$, saadaan jatkuva korko, jota jatkossa kutsutaan korkoutuvuudeksi

$$\delta = \lim_{m \to \infty} i^{(m)}.$$

Yleisesti ei voida olettaa, että korkoutuvuus olisi ajasta riippumaton vakio, vaan todellisuudessa se muuttuu suhdanteiden mukana. Tällöin merkitään korkoutuvuutta hetkellä t $\delta(t)$:llä.

Talletetun määrän muutos hetkestä t hetkeen $t + \Delta$ on

$$\frac{F(t+\Delta) - F(t)}{\Delta} = F'(t) = \delta(t)F(t).$$

Yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \delta(t)$$

josta edelleen merkitsemällä $F'(t) = \frac{dt}{ds}$ ja integroimalla puolittain saadaan

$$\int \frac{dt}{F(t)} = \int_0^t \delta(s)ds.$$

Tämän ratkaisemalla yhtälön saa muotoon

$$lnF(t) = \int_0^t \delta(s)ds + C_0,$$

[1] Gerber

jossa $C_0 \in \mathbf{R}$. Kun merkitään $e^{C_0} = C > 0$, saadaan

$$F(t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds + C_0} = Ce^{\int_0^t \delta(s)ds}.$$

Koska alkuehdoksi voidaan olettaa $F(0) = F$, saadaan ratkaistuksi vakio C

$$F = Ce^{\int_0^0 \delta(s)ds} = C.$$

Siis

$$F(t) = Fe^{\int_0^t \delta(s)ds}.$$

Oletetaan, että talletuksen määrä hetkellä n on F(n). Tiedetään, että korkoutuvuus on aikavälillä $[0, n]$ määräytynyt funktion $\delta(t)$ perusteella. Kun haluamme tietää, minkä suuruinen summa hetkellä 0 on talletettu, saamme ratkaisun soveltamalla yllä olevaa yhtälöä. Siis hetkellä 0, talletettu määrä on ollut

$$F(0) = F = F(n)e^{-\int_0^n \delta(s)ds}$$

Tätä operaatiota kutsutaan *diskonttaamiseksi*. Diskonttaaaminen on erittäin tärkeä väline henkivakuutusmatematiikassa. Se johtuu siitä, että tiedämme usein ensin sen, kuinka paljon vakuutetulle täytyy maksaa esimerkiksi hetkellä n. Tällöin diskonttaamalla kyseinen summa tähän hetkeen, saadaan tulokseksi se rahamäärä, joka yhtiöllä täytyisi olla tällä hetkellä. Todellisuudessa tätä vaikeuttaa se, ettei tietoa toteutuvista koroista esimerkiksi tulevan kymmenen vuoden ajalta ole kenelläkään. Näistä voidaan esittää korkeintaan valistuneita arvioita.

3 Jäljellä oleva elinaika ja kuolevuus

Olkoon T positiivinen satunnaismuuttuja, joka kuvaa *vastasyntyneen jäljellä olevaa elinaikaa*. Kun $t \geq 0$ $T:n$ määrittelee kertymäfunktio

$$F(t) = \mathbf{P}(T \leq t) = \int_0^t f(s)ds,$$

jossa f on jakauman tiheysfunktio. Oletetaan, että tiheysfunktioilla f, on äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä äärellisillä väleillä. Tällöin on voimassa

$$F'(t) = f(t).$$

Olkoon T_x *x-ikäisen jäljellä olevaa elinaikaa* kuvaava positiivinen satunnaismuuttuja todennäköisyyskentällä (Ω, σ, P). T_x:n kertymäfunktiolle F_x on voimassa

$$F_x(t) = \mathbf{P}(T_x \leq t) = \mathbf{P}(T \leq x + t \mid T > x).$$

Tämä kuvaa siis todennäköisyyttä, että x-ikäinen kuolee t vuoden kuluessa. Vastaavasti on vakiintunut merkintä ${}_tp_x = 1 - {}_t\,q_x = P(T_x > t)$, joka siis kuvaa todennäköisyyttä, että x-ikäinen on elossa t vuoden kuluttua.

Merkintöjä [Pesonen et al.] Seuraavat merkinnät ovat vakiintuneita henkivakuutusmatematiikassa ja tästä eteenpäin ne oletetaan tunnetuiksi tässä tutkielmassa.

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &= \mathbf{P}(\text{x-ikäinen kuolee t vuoden kuluessa}) \\
&= F_x(t) = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \\
{}_tp_x &= \mathbf{P}(\text{x-ikäinen elää t vuoden kuluttua}) \\
&= 1 - F_x(t) = \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)} \\
{}_tp_0 &= s(t) = \mathbf{P}(\text{vastasyntynyt elää t vuoden kuluttua})
\end{aligned}$$

Viimeisin näistä on niin sanottu selviytymisfunktio, joka kuvaa siis vastasyntyneen selviytymistodennköisyyttä.

Määritelmä 3.1 (Pesonen et. al)**.** *Olkoon $\Delta > 0$ mielivaltainen. Yllä olevan nojalla*

$${}_\Delta q_x = \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} \times \frac{\Delta}{1 - F(x)}.$$

Saadaan yhtälö muotoon

$$\frac{{}_\Delta q_x}{\Delta} = \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} \times \frac{1}{1-F(x)}.$$

Ottamalla tästä puolittain oikeanpuoleinen raja-arvo saadaan

$$\lim_{\Delta \to 0+} \frac{{}_\Delta q_x}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0+} \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} \times \frac{1}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{1-F(x)}.$$

Merkitsemällä yhtälön vasenta puolta $\mu(x)$:llä saadaan yhtälö

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}. \tag{3.1}$$

Tätä kutsutaan kuolevuusintensiteetiksi tai lyhyesti kuolevuudeksi.

Lause 3.1 (Pesonen et al.)**.** *Olkoon $t \geq 0$, $x \geq 0$ $F(x+t) < 1$. Tällöin*

$${}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du} = e^{-\int_0^t \mu(u+x)du} \tag{3.2}$$

$${}_t q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du} = 1 - e^{-\int_0^t \mu(u+x)du} \tag{3.3}$$

Todistus Riittää todistaa yhtälö (**??**), koska toinen yhtälö seuraa suoraan tästä.

Oletetaan ensin, että $x = 0$. Tarkastelemalla kuolevuuden määrittelevää yhtälöä (**??**), voidaan huomata, että kuolevuus voidaan esittää logaritmisena derivaattana

$$\mu(u) = -\frac{dln(1-F(u))}{du}.$$

Tästä saadaan yhtälö

$$-\int_0^t \mu(u)du = ln(1-F(u)).$$

ja edelleen

$$e^{-\int_0^t \mu(u)du} = 1 - F(u) = {}_t\, p_0 = s(t)$$

Osoitetaan nyt yleisesti x-ikäiselle vakuutetulle. Todistuksen alkuosan perusteella saadaan

$$\frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+t} \mu(u)du}}{e^{-\int_0^x \mu(u)du}}.$$

Eksponenttifunktion ominaisuuksien perusteella saadaan yhtälö muotoon

$$\frac{e^{-\int_0^{x+t} \mu(u)du}}{e^{-\int_0^x \mu(u)du}} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du} = e^{-\int_0^t \mu(x+u)du} = {}_t\, p_x. \qquad \square$$

On hyvä huomioida, että jäljellä olevan elinajan T_x tiheysfunktio määräytyy seuraavasti

$$f_x(t) = {}_t\, p_x \mu(x+t). \tag{3.4}$$

Tarkastellaan seuraavaksi joukkoa, jossa on N vakuutettua. Oletetaan vakuutettujen jäljellä olevat elinajat $T_1, \ldots, T_N$, toisistaan riippumattomiksi. Tällöin yhteiskertymäfunktio jäljellä oleville elinajoille on

$$F_{x_1,\ldots,x_N}(t_1, \ldots, t_N) = \mathbf{P}(T_{x_1} \leq t_1, \ldots, T_{x_N} \leq t_N)$$

Riippumattomuuden nojalle saadaan

$$F_{x_1,\ldots,x_N}(t_1, \ldots, t_N) = \prod_{j=1}^{N} \mathbf{P}(T_{x_j} \leq t_j) = \prod_{j=0}^{N} \int_0^{t_j} f_{x_j}(s_j) ds_j$$

Toisin sanoen jäljellä olevien elinaikojen yhteistiheysfunktio on siis

$$f_{x_1,\ldots,x_N}(t_1, \ldots, t_N) = \prod_{j=1}^{N} f_{x_j}(t_j) = \prod_{j=1}^{N} {}_{t_j}p_{x_j} \mu_{x_j}(t_j) \tag{3.5}$$

Otetaan lisäksi käyttöön merkintä [Pesonen et al.]

$$T_{x_{j_1},\ldots,x_{j_k}} = min\{T_{x_{j_1}}, \ldots, T_{x_{j_k}}\},$$

jossa $k \in \{1, \ldots, N\}$ ja $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq N$. Riippumattomuuden nojalla elinaikaan $T_{x_{j_1},\ldots,x_{j_k}}$ liittyvä kuolevuus on

$$\mu_{x_{j_1},\ldots,x_{j_k}}(t) = \mu_{j_1}(x_{j_1} + t) + \ldots + \mu_{j_k}(x_{j_k} + t), \qquad t \geq 0. \tag{3.6}$$

Elämänvaravakuutus Tarkastellaan yhden hengen elämänvaravakuutusta, jonka vakuutuskauden pituus on n vuotta ja maksettava korvaus $S\mathbf{1}(T_x \geq n)$. Tällöin vakuutuksen nettokertamaksu on

$$P = Se^{-\int_0^n (\delta(s)+\mu(x+s))ds}$$

Kun korvaus $S = 1$, merkitään nettokertamaksua seuraavalla tavalla

$$A_{x:\overline{n}|}(V) = e^{-\int_0^n (\delta(s)+\mu(x+s))ds}. \tag{3.7}$$

Laajennettuna vastaavasti N:lle vakuutetulle, joiden jäljellä olevat elinajat oletetaan riippumattomiksi, saadaan

$$A_{x_1:\ldots:x_N:\overline{n}|}(V) = e^{-\int_0^n (\delta(s)+\mu_1(x_1+s)+\ldots+\mu_N(x_N+s))ds} \tag{3.8}$$

Yhden hengen kuolemanvaravakuutus Vastaavasti yhden hengen kuolemanvaravakuutukselle

$$A_{x:\overline{n}|}(K) = \int_0^n \mu(x+t)e^{-\int_0^t(\delta(s)+\mu(x+s))ds}dt \tag{3.9}$$

Jatkuvamaksuinen eläke Yhden hengen n-vuotisen jatkuvan eläkevakuutuksen nettokertamaksu, kun korvaus $S = 1$ on

$$\overline{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\int_0^t(\delta(s)+\mu(x+s))ds}dt. \tag{3.10}$$

Vastaavasti n-vuotisen eläkevakuutuksen nettokertamaksu N:lle vakuutetulle, joiden jäljellä olevat elinajat ovat toisistaan riippumattomia, on

$$\overline{a}_{x_1:\ldots:x_N:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\int_0^t(\delta(s)+\mu_1(x_1+s)+\ldots+\mu_N(x_N+s))ds}dt \tag{3.11}$$

Vaikka en käsittelekään tässä pro gradu -tutkielmassa eläkevakuutuksia, tarvitsemme eläkevakuutuksen nettokertamaksua jatkuvan vakuutusmaksuintensiteetin määrittelyssä kappaleessa 6.

4 Elämänvaravakuutus

Tarkastellaan ensin usean vakuutetun elämänvaravakuutusta, jossa vakuutuskausi on n vuoden mittainen. Olkoon vakuutettujen iät $x_i, i = 1, \ldots, N$ sekä jäljellä olevat elinajat $T_i, i = 1, \ldots, N$. Oletetaan, että vakuutettujen elinajat ovat toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia. Olkoon vakuutettujen kuolevuudet $\mu_i, i = 1, \ldots, N$. Usean vakuutetun elämänvaravakuutuksessa korvauksen määrä riippuu siitä, ketkä vakuutetuista ovat elossa vakuutuskauden päättyessä hetkellä n. Mahdollisia korvauksen maksuhetkiä on siis korkeintaan yksi. Se on vakuutuskauden lopussa eli hetkellä n.

Elämänvaravakuutuksessa vakuutetulle maksetaan korvaus S, mikäli hän on elossa sovitun vakuutuskauden n päättyessä. Mikäli vakuutettu kuolee ennen vakuutuskauden päättymistä, ei korvausta makseta.

4.1 Kaksi vakuutettua

Ajatellaan kahden vakuutetun yhdistettyä henkivakuutusta prosessina $Y(t) = (y_1, y_2)$, jossa

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{,jos vakuutettu j on kuollut} \\ 1 & \text{,jos vakuutettu j on elossa.} \end{cases}$$

Merkintä $Y(t)$ kertoo siis molempien vakuutettujen tilan hetkellä t.

Nyt prosessin tilasta toiseen siirtyminen on mahdollista alla olevan kuvan mukaisesti.

$$\begin{tikzcd} & (1,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (0,1) \arrow[dr] & & (1,0) \arrow[dl] \\ & (0,0) & \end{tikzcd}$$

Aloitetaan pohtimalla, kuinka elämänvaravakuutuksen *korvaus* S ja *nettokertamaksu* P määräytyvät kahden vakuutetun tapauksessa. Määräytyköön kahden vakuutetun tapauksessa korvaus S seuraavasti:

$$\begin{cases} S(1,1) & \text{jos molemmat vakuutetut elossa hetkellä n} \\ S(0,1) & \text{jos vakuutettu 1 kuollut ja vakuutettu 2 elossa hetkellä n} \\ S(1,0) & \text{jos vakuutettu 1 elossa ja vakuutettu 2 kuollut hetkellä n} \end{cases}$$

Korvaus hetkellä n voidaan ilmaista indikaattorien avulla seuraavasti

$$\begin{aligned} S = \ & S(1,1)\mathbf{1}(T_{x_1} > n, T_{x_2} > n) \\ & + S(0,1)\mathbf{1}(T_{x_1} \leq n, T_{x_2} > n) \\ & + S(1,0)\mathbf{1}(T_{x_1} > n, T_{x_2} \leq n). \end{aligned}$$

Indikaattorifunktio on sellainen, että

$$\mathbf{1}(x \in A) = \begin{cases} 1, & \text{jos} \quad x \in A \\ 0, & \text{jos} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Se saa siis arvon yksi, jos tarkasteltava tila toteutuu ja arvon nolla, jos tila ei toteudu. Toisin sanoen indikaattori nollaa ne summattavat termit, jotka eivät toteudu ja jättää summaan toteutuneet termit.

Korvauksen S summattavista siis todellisuudessa korkeintaan yksi poikkeaa nollasta. Korvaus hetkellä n määräytyy ainoastaan sillä perusteella, ovatko vakuutetut elossa vai kuolleet.

Merkitään seuraavaksi

$$S(Y(t)) = \sum_{0 \leq k_1 < k_2 \leq 1} S^*(k_1, k_2) \tag{4.1}$$

Jotta yhtiön talous olisi tasapainossa pitkällä aikavälillä jokaisen erillisen vakuutuksen osalta, täytyy yhtiön tulojen ja menojen vastata toisiaan. Tällöin siis vakuutuksen nettokertamaksun ja maksettavien korvauksien täytyisi olla yhtä suuret. Koska maksut ja korvaukset maksetaan kuitenkin eri aikaan, täytyy yhtäsuuruudessa ottaa huomioon myös ensin maksettavaan suoritukseen vaikuttava korko. Tällöin siis vakuutuksen nettokertamaksu P määräytyy korvauksen S hetkeen nolla diskontattuna odotusarvona. Se on tilojen toteutumistodennäköisyyksillä painotettu summa kussakin toteumassa maksettavasta korvauksesta diskontattuna hetkeen nolla. Tätä kutsutaan *ekvivalenssiperiaatteeksi.*

$$
\begin{aligned}
P &= \mathbf{E}(e^{-\int_0^n \delta(s)ds} S) \\
&= e^{-\int_0^n \delta(s)ds}\Big[S(1,1)\mathbf{P}(T_{x_1} > n, T_{x_2} > n) + S(0,1)\mathbf{P}(T_{x_1} \leq n, T_{x_2} > n) \\
&\quad + S(1,0)\mathbf{P}(T_{x_1} > n, T_{x_2} \leq n)\Big] \\
&= e^{-\int_0^n \delta(s)ds}\Big[S(1,1)\ {}_np_{x_1}\ {}_np_{x_2} + S(0,1)(1 - \ {}_np_{x_1})\ {}_np_{x_2} \\
&\quad + S(1,0)\ {}_np_{x_1}(1 - \ {}_np_{x_2})\Big] \\
&= e^{-\int_0^n \delta(s)ds}\Big[\ {}_np_{x_1}\ {}_np_{x_2}\Big(S(1,1) - S(0,1) - S(1,0)\Big) \\
&\quad + S(0,1)\ {}_np_{x_2} + S(1,0)\ {}_np_{x_1}\Big] \\
&= e^{-\int_0^n (\delta(s) + \mu_1(x_1+s) + \mu_2(x_2+s))ds}\Big(S(1,1) - S(0,1) - S(1,0)\Big) \\
&\quad + S(0,1)e^{-\int_0^n (\delta(s) + \mu_2(x_1+s))ds} + S(1,0)e^{-\int_0^n (\delta(s) + \mu_1(x_1+s))ds} \\
&= \big[S(1,1) - S(0,1) - S(1,0)\big]A_{x_1x_2:\overline{n}|}(V) \\
&\quad + S(0,1)A_{x_2:\overline{n}|}(V) + S(1,0)A_{x_1:\overline{n}|}(V).
\end{aligned}
$$

Merkitään nyt korvauksia vielä toisin yhtälön **??** mukaisesti

$$S^*(0,1) = S(0,1)$$

$$S^*(0,1) = S(1,0)$$

$$S^*(1,1) = S(1,1) - S(0,1) - S(1,0).$$

Nyt saamme siis kirjoitettua nettokertamaksun myös muodossa

$$P = S^*(1,1)A_{x_1x_2:\overline{n}|}(V) + S^*(0,1)A_{x_2:\overline{n}|}(V) + S^*(1,0)A_{x_1:\overline{n}|}(V).$$

Tämä on lähinnä merkinnällinen helpotus eikä siis tietenkään muuta saatavaa lopputulosta. Kuten huomaamme esimerkissä 4.1, helpottaa S^*-merkintöjen käyttöönotto käytännön laskelmien tekemistä. Huomion arvoista on, että 1 -korvauksisen elämänvaravakuutuksen nettokertamaksu painottaa nimenomaan sitä S^*-korvausta, jossa elossaolijat ovat samat kuin painottavassa nettokertamaksussa on vakuutetut.

4.2 Yleinen tapaus

Tarkastellaan usean vakuutetun elämänvaravakuutusta nyt yleisessä tapauksessa, kun vakuutettuja on N kappaletta.

Olkoon jokainen vakuutettu $j = 1, \ldots, N$ joko elossa tai kuollut hetkellä t. Merkitään jokaisen vakuutetun tilaa seuraavasti

$$y_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{,jos vakuutettu j on kuollut hetkellä t} \\ 1 & \text{,jos vakuutettu j on elossa hetkellä t} \end{cases}$$

Koko prosessin tila määräytyy siis kaikkien vakuuttettujen tilan perusteella. Merkitään tätä tarkastelun helpottamiseksi seuraavasti

$$Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_N(t)) = (\mathbf{1}(T_{x_1} > n), \ldots, \mathbf{1}(T_{x_N} > n)).$$

Nyt korvaus määräytyy ainoastaan sillä perusteella ketkä vakuutetuista ovat elossa. Korvaus S määräytyy siis seuraavasti

$$S = \sum_{\substack{1 \leq k_1 < \ldots < k_l \leq N \\ l=1,\ldots,N}} S(\mathbf{1}(T_{x_1} > n), \ldots, \mathbf{1}(T_{x_N} > n)) \\ \mathbf{1}(T_{x_{k_1}} > n, \ldots, T_{x_{k_l}} > n, T_{x_r} \leq n \quad \forall r \notin \{k_1, \ldots, k_l\}).$$

Tämä summa käy läpi kaikki mahdolliset variaatiot, joissa $l = 1, \ldots, N$ kiinnitettyä vakuutettua ovat elossa ja muut vakuutetut kuolleita. Summassa on kuitenkin korkeintaan yksi nollasta eroava termi, sillä todellisuudessa hetkellä n jokainen vakuutettu on joko elossa tai kuollut. Tämän vuoksi indikaattori nollaa muut kuin todellisuudessa toteutuneeseen tilaan liittyvän summattavan.

Korvaus voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$S = \sum_{\substack{1 \leq k_1 < \ldots < k_l \leq N \\ l=1,\ldots,N}} S^*(k_1, \ldots, k_l)\mathbf{1}(T_{k_1 \ldots k_l} > n).$$

Summassa käydään läpi kaikki mahdolliset variaatiot elossaolevista vakuutetuista, minkä jälkeen summataan niiden yli. Lisäksi katsotaan läpi kaikki mahdolliset variaatiot elossaolevista ryhmittäin ja maksetaan vastaava korvaus, mikäli kaikki kyseisen ryhmän vakuutetut ovat elossa.

Vakuutettujen $k_1, \ldots, k_l$ ollessa elossa hetkellä n ja muiden vakuutettujen ollessa tällöin kuolleita kuolleita, saadaan

$$S(Y(n)) = \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\} \\ \subseteq \{k_1,\ldots,k_l\}}} S^*(j_1, \ldots, j_m).$$

Tässä siis tarkastellaan tilaa $Y(n)$ ja poimitaan sieltä ne vakuutetut $k_1, \ldots, k_l$, jotka ovat elossa hetkellä n. Tämän jälkeen tarkastellaan joukon $\{k_1, \ldots, k_l\}$ kaikkien osajoukkojen $\{j_1, \ldots, j_m\}$ toteumiin liittyviä korvauksia $S^*(j_1, \ldots, j_m)$ ja summataan ne. Havainnoillistetaan tätä tarkemmin esimerkissä 4.1.

Vastaavasti kuin kahden vakuutetun tapauksessa, on nettokertamaksu hetkeen nolla diskontattu odostusarvo korvauksesta

$$
\begin{aligned}
P &= \mathbf{E}(e^{-\int_0^n \delta(s)ds} S) \\
&= \mathbf{E}\Big(e^{-\int_0^n \delta(s)ds}\Big[\textstyle\sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_l\le N\\ l=1,\ldots,N}} S^*(k_1, \ldots, k_l)\mathbf{1}(T_{k_1\ldots k_l} > n)\Big]\Big) \\
&= e^{-\int_0^n \delta(s)ds}\Big[\textstyle\sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_l\le N\\ l=1,\ldots,N}} S^*(k_1, \ldots, k_l)\mathbf{P}(T_{k_1\ldots k_l} > n)\Big] \\
&= e^{-\int_0^n \delta(s)ds}\Big[\textstyle\sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_l\le N\\ l=1,\ldots,N}} S^*(k_1, \ldots, k_l)e^{-\int_0^n \mu_{x_{k_1}\ldots x_{k_l}}(s)ds}\Big] \\
&= \textstyle\sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_l\le N\\ l=1,\ldots,N}} S^*(k_1, \ldots, k_l) \quad A_{x_{k_1}\ldots x_{k_l}:\overline{n}|}(V)
\end{aligned}
$$

Esimerkki 4.1. *Tarkastellaan kolmen vakuutetun elämänvaravakuutusta, jossa korvaus maksetaan vakuutuskauden lopussa eli hetkellä n sillä perusteella, ketkä vakuutetuista ovat tällöin elossa. Olkoon vakuutettujen iät vakuutuskauden alussa x_1, x_2 ja x_3. Oletetaan, että vakuutettujen jäljellä olevat elinajat $T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3}$ ovat toisistaan riippumattomia. Sovittakoon, että hetkellä n maksetaan korvaus $S(Y(n))$. Korvaukset määräytyvät siis alla olevan taulukon mukaisesti. Nyt käyttämällä S^*-merkintöjä, saadaan korvauksille taulukossa olevat yhtälöt.*

Elossaolevat	*Korvaus*
x_1	$S(1,0,0) = S^*(1)$
x_2	$S(0,1,0) = S^*(2)$
x_3	$S(0,0,1) = S^*(3)$
x_1, x_2	$S(1,1,0) = S^*(1) + S^*(2) + S^*(1,2)$
x_1, x_3	$S(1,0,1) = S^*(1) + S^*(3) + S^*(1,3)$
x_2, x_3	$S(0,1,1) = S^*(2) + S^*(3) + S^*(2,3)$
x_1, x_2, x_3	$S(1,1,1) = S^*(1) + S^*(2) + S^*(3) + S^*(1,2)$
	$+ S^*(1,3) + S^*(2,3) + S^*(1,2,3)$

Koska nyt siis halutaan ilmaista vakuutuksen nettokertamaksu S^*-suureiden *avulla, ratkaistaan ne tästä yhtälöryhmästä*

$$\begin{cases} S^*(1) = & S(1,0,0) \\ S^*(2) = & S(0,1,0) \\ S^*(3) = & S(0,0,1) \\ S^*(1,2) = & S(1,1,0) - S(1,0,0) - S(0,1,0) \\ S^*(1,3) = & S(1,0,1) - S(1,0,0) - S(0,0,1) \\ S^*(2,3) = & S(0,1,1) - S(0,1,0) - S(0,0,1) \\ S^*(1,2,3) = & S(1,1,1) - S(1,0,0) - S(0,1,0) - S(0,0,1) \\ & -[S(1,1,0) - S(1,0,0) - S(0,1,0)] \\ & -[S(1,0,1) - S(1,0,0) - S(0,0,1)] \\ & -[S(0,1,1) - S(0,1,0) - S(0,0,1)] \\ = & S(1,1,1) - S(1,1,0) - S(1,0,1) - S(0,1,1) \\ & +S(1,0,0) + S(0,1,0) + S(0,0,1) \end{cases}$$

jolloin nettokertamaksuksi saadaan

$$\begin{aligned} P = \; & S^*(1,2,3)A_{x_1x_2x_3:\overline{n}|}(V) + S^*(1,2)A_{x_1x_2:\overline{n}|}(V) + S^*(1,3)A_{x_1x_3:\overline{n}|}(V) \\ & +S^*(2,3)A_{x_2x_3:\overline{n}|}(V) + S^*(1)A_{x_1:\overline{n}|}(V) \\ & +S^*(2)A_{x_2:\overline{n}|}(V) + S^*(3)A_{x_3:\overline{n}|}(V) \end{aligned}$$

ja edelleen alkuperäisillä korvauksilla ilmaistuna nettokertamaksuksi saadaan

$$\begin{aligned} P = \; & A_{x_1x_2x_3:\overline{n}|}(V)[S(1,1,1) - S(1,1,0) - S(1,0,1) - S(0,1,1) \\ & +S(1,0,0) + S(0,1,0) + S(0,0,1)] \\ & +A_{x_1x_2:\overline{n}|}(V)[S(1,1,0) - S(1,0,0) - S(0,1,0)] \\ & +A_{x_1x_3:\overline{n}|}(V)[S(1,0,1) - S(1,0,0) - S(0,0,1)] \\ & +A_{x_2x_3:\overline{n}|}(V)[S(0,1,1) - S(0,1,0) - S(0,0,1)] \\ & +A_{x_1:\overline{n}|}(V)S(1,0,0) + A_{x_2:\overline{n}|}(V)S(0,1,0) + A_{x_3:\overline{n}|}(V)S(0,0,1). \end{aligned}$$

5 Kuolemanvaravakuutus

Johdetaan seuraavaksi usean vakuutetun kuolemanvaravakuutuksen kokonaiskorvaus ja nettokertamaksu vastaavasti kuin usean vakuutetun elämänvaravakuutukselle. Kuolemanvaravakuutuksessa korvaus maksetaan mikäli vakuutettu kuolee ennen vakuutuskauden päättymistä eli ennen hetkeä n. Oletetaan tässä luvussa ja jatkossa kuolemanvaravakuutusta käsiteltäessä, että korvaus maksetaan aina kuolinhetkellä.

Kuolemanvaravakuutuksen osalta korvauksen määrä ei ole yhtä yksinkertainen kuin elämänvaravakuutuksen osalta. Siinä missä elämänvaravakuutuksessa korvausajankohtia ja -määriä on ainoastaan yksi, voi kuolemanvaravakuutuksessa korvaushetkiä olla koko vakuutuskauden ajan. Jokaisen kuoleman hetkellä korvaus riippuu ainoastaan siitä, mihin tilaan siirrytään kuoleman sattuessa. Kokonaiskorvauksen osalta on siis merkitystä myös sillä, missä järjestyksessä vakuutetut kuolevat.

Oletetaan myös kuolemanvaravakuutuksen osalta vakuutettujen jäljellä olevat elinajat toisistaan riippumattomiksi. Tämä helpottaa mallin tarkastelua, mutta on myös käytännössä yleisesti käytössä. Se, onko oletus täysin realistinen, on hankalampi kysymys. Vakuutusyhtiön kannalta ei voida luotettavasti arvioida, minkälainen riippuvuussuhde vakuutettujen elinaikojen välillä on. Intuitiivisesti ajateltuna esimerkiksi puolisoiden eliaikojen välillä on todennäköisesti jonkinlainen riippuvuussuhde; on mahdollista, että toisen puolison kuollessa toisen elämänlaatu tai -halu laskee, jolloin se vaikuttaa myös elossaolevan puolison jäljellä olevaan elinaikaan. Toisaalta samassa taloudessa asuvilla puolisoilla on usein samankaltaiset elämäntavat, jotka tunnetusti vaikuttavat kuolleisuuteen.

Oletetaan myös tässä luvussa, että vakuutettujen iät hetkellä nolla ovat $x_i, \quad i = 1, \dots, N$ ja että jäljellä olevat elinajat $T_i, \quad i = 1, \dots, N$ ovat toisistaan riippumattomia. Olkoon vakuutettujen kuolevuudet $\mu_i, \quad i = 1, \dots, N$. Oletetaan edelleen vakuutuskauden pituudeksi n.

5.1 Kaksi vakuutettua

Tarkastellaan myös kuolemanvaravakuutusta aluksi kahden vakuutetun osalta. Kuolemanvaravakuutuksessa korvaus määräytyy seuraavasti:

$$\begin{cases} S(0,1) & \text{jos vakuutettu 1 kuolee ennen hetkeä n ja vakuutettu 2 on elossa} \\ S(1,0) & \text{jos vakuutettu 2 kuolee ennen hetkeä n ja vakuutettu 1 on elossa} \\ S(0,0) & \text{toisen kuoleman sattuessa ennen hetkeä n} \end{cases}$$

Nyt siis korvauksen suuruus saattaa vaihdella riippuen siitä kumpi vakuutetuista kuolee ensin. Tämä voisi johtua esimerkiksi siitä, että kyseessä on pariskunta, jonka toinen osapuoli on selkeästi paremmin palkattu kuin toinen. Tällöin paremmin ansaitsevan puolison kuollessa huonommin palkatun puolison toimeentulo on paremmin turvattu suuremmalla kuolemantapauskorvauksella. Havainnoillistetaan siirtymiä vielä alla olevalla kuvalla

$$
\begin{tikzcd}
& (1,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(0,1) \arrow[dr] & & (1,0) \arrow[dl] \\
& (0,0) &
\end{tikzcd}
$$

Oletetaan edelleen, että vakuutetut ovat x_1 ja x_2 - ikäisiä ja että vakuutettujen elinajat ovat toisistaan riippumattomia.

Kahden hengen kuolemanvaravakuutuksen korvaus määräytyy siis seuraavasti

$$
\begin{aligned}
S &= S(0,1)\mathbf{1}(T_{x_1} \leq n, \quad T_{x_1} < T_{x_2}) \\
&+ S(1,0)\mathbf{1}(T_{x_2} \leq n, \quad T_{x_2} < T_{x_1}) \\
&+ S(0,0)\mathbf{1}(T_{x_1} \leq n, \quad T_{x_2} \leq n).
\end{aligned}
$$

Toisin kuin elämänvaravakuutuksen tapauksessa, nyt summassa voi olla useampi kuin yksi nollasta eroava termi. Kaikki termit eivät kuitenkaan voi olla nollasta eroavia, sillä ei ole mahdollista, että kahdesta ensimmäisestä summattavasta molemmat toteutuisivat.

Vastaavasti kuin elämänvaravakuutuksessa vakuutuksen nettokertamaksu P saadaan korvauksen S hetkeen nolla diskontattuna odotusarvona. Nyt korvauksia ei voi diskontata hetkestä n, sillä korvaukset maksetaan aina kuolinhetkillä, jolloin myös diskonttaukset tehdään kuolinhetkistä hetkeen nolla.

$$
\begin{aligned}
P = \quad & \mathbf{E}\Big[S(0,1)e^{-\int_0^{T_{x1}}\delta(s)ds}\mathbf{1}(T_{x_1} \le n, T_{x_1} < T_{x_2}) \\
& +S(1,0)e^{-\int_0^{T_{x2}}\delta(s)ds}\mathbf{1}(T_{x_2} \le n, T_{x_1} > T_{x_2}) \\
& +S(0,0)[e^{-\int_0^{T_{x1}}\delta(s)ds}\mathbf{1}(T_{x_1} \le n, T_{x_1} > T_{x_2}) \\
& +e^{-\int_0^{T_{x2}}\delta(s)ds}\mathbf{1}(T_{x_2} \le n, T_{x_1} < T_{x_2})]\Big] \\
= \quad & \int_0^n \Big[S(0,1)e^{-\int_0^t \delta(s)ds}\ {}_tp_{x_1}\mu_1(x_1+t)\ {}_tp_{x_2} \\
& +S(1,0)e^{-\int_0^t \delta(s)ds}\ {}_tp_{x_2}\mu_2(x_2+t)\ {}_tp_{x_1}\Big]dt \\
& +S(0,0)\Big[\int_{t_2<t_1\le n} e^{-\int_0^{t_1}\delta(s)ds} f_{x_1x_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2 \\
& +\int_{t_1<t_2\le n} e^{-\int_0^{t_2}\delta(s)ds} f_{x_1x_2}(t_1,t_2)dt_2dt_1\Big].
\end{aligned}
$$

Nyt siis jälkimmäisen kuoleman todennäköisyys saadaan laskettua helpoimmin jakamalla se kahteen osaan. Ensimmäisessä on tarkasteltu todennäköisyyttä tapaukselle, jossa vakuutettu 2 on kuolee ennen vakuutettua 1, mutta molemmat kuitenkin ennen hetkeä n. Tällöin korvaus diskontataan hetkeen nolla vakuutetun 1 kuolinhetkestä. Toisessa tapauksessa kuolemien järjestys on päinvastoin, jolloin myös muut muutokset ovat vastaavat. Tiheysfunktiona molemmissa tapauksissa on vakuutettujen jäljellä olevien elinaikojen yhteistiheysfunktio $f_{x_1x_2}$, joka määräytyy kuten yhtälössä **??**. Todettakoon vielä, että tällöin myös integraalit ovat siis kaksiulotteisia.

5.2 Yleinen tapaus

Tarkastellaan nyt myös kuolemanvaravakuutusta usean vakuutetun tapauksessa, kun vakuutettuja on N kappaletta. Tässäkin tapauksessa huomion arvoista on, että kaikkien vakuutettujen jäljellä olevat eliajat oletetaan toisistaan riippumattomiksi. Kuten elämänvaravakuutuksenkin tapauksessa, merkitään yksittäisen vakuutetun tilaa seuraavasti

$$
y_j = \begin{cases} 0 & \text{,jos vakuutettu j on kuollut} \\ 1 & \text{,jos vakuutettu j on elossa} \end{cases}
$$

ja koko prosessin tilaa seuraavasti

$$Y(t) = (y_1, \ldots, y_N).$$

Yleistä tapausta kuolemanvaravakuutuksen osalta ei voi kuvata samoin kuin elämänvaravakuutusta, sillä kuolemanvaravakuutuksen osalta merkitystä on myös sillä, missä järjestyksessä vakuutetut kuolevat. Erona on myös se, että korvauksia voidaan maksaa koko vakuutuskauden ajan, jokaisella kuolinhetkellä.

Nyt hetkellä t maksettava korvaus S riippuu siis ainoastaan siitä, mihin tilaan siirrytään kuoleman sattuessa. Siis

$$S(t) = \sum_{\substack{k_j=0 \\ j=1,\ldots,N}}^{1} S(Y(t) = (k_1, \ldots, k_N))\mathbf{1}(Y(t) = (k_1, \ldots, k_N), Y(t) \neq Y(t-)).$$

Tämä summa käy läpi kaikki mahdolliset tilavariaatiot, mutta summassa on kuitenkin kullakin ajanhetkellä korkeintaan yksi nollasta eroava termi. Summaa voidaan ajatella siten, että tarkastellaan jokaista vakuutettua erikseen olettaen, että muiden vakuutettujen tila pidetään vakiona.

Sivuutetaan tässä vaiheessa usean vakuutetun kuolemanvaravakuutuksen nettokertamaksun laskeminen ja tarkastellaan sitä tarkemmin kappaleessa 10 Markov-prosessin avulla. Havainnoillistetaan kuitenkin seuraavassa esimerkissä sitä, kuinka monimutkaiseksi usean vakuutetun kuolemanvaravakuutuksen nettokertamaksun laskeminen muodostuu.

Esimerkki 5.1. *Tarkastellaan nyt esimerkin avulla kolmen vakuutetun kuolemanvaravakuutusta. Oletetaan, että vakuutettujen iät ovat x_1, x_2 ja x_3. Oletetaan edelleen vakuutettujen jäljellä olevat elinajat toisistaan riippumattomiksi. Olkoon vakuutuskauden pituus n vuotta. Oletetaan, että ekvivalenssiperiaatteen mukainen vakuutusmaksu P maksetaan kerralla vakuutuskauden alussa.*

Kuvataan nyt prosessin tilaa $Y(t)$:llä siten, että $Y(t) = (y_1, y_2, y_3)$, jossa

$$y_j = \begin{cases} 0, & \textit{jos vakuutettu } j \textit{ on kuollut} \\ 1, & \textit{jos vakuutettu } j \textit{ on elossa,} \end{cases}$$

kun $j \in \{1, 2, 3\}$.

Nyt koko vakuutuskauden aikana maksettava kokonaiskorvaus määräytyy *seuraavasti*

$$
\begin{aligned}
S = \ & S(0,1,1)\mathbf{1}(T_{x_1} \le n, T_{x_1} < T_{x_2}, T_{x_1} < T_{x_3}) \\
& + S(1,0,1)\mathbf{1}(T_{x_2} \le n, T_{x_1} > T_{x_2}, T_{x_2} < T_{x_3}) \\
& + S(1,1,0)\mathbf{1}(T_{x_3} \le n, T_{x_2} < T_{x_3}, T_{x_1} > T_{x_3}) \\
& + S(0,0,1)\mathbf{1}(T_{x_1} \le n, T_{x_2} \le n, T_{x_1} < T_{x_3}, T_{x_2} < T_{x_3}) \\
& + S(0,1,0)\mathbf{1}(T_{x_1} \le n, T_{x_3} \le n, T_{x_1} < T_{x_2}, T_{x_2} > T_{x_3}) \\
& + S(1,0,0)\mathbf{1}(T_{x_2} \le n, T_{x_2} \le n, T_{x_1} > T_{x_2}, T_{x_1} > T_{x_3}) \\
& + S(0,0,0)\mathbf{1}(T_{x_1} \le n, T_{x_2} \le n, T_{x_3} \le n)
\end{aligned}
$$

Tällöin nettokertamaksuksi saadaan

$$
\begin{aligned}
P = \ & S(0,1,1)[\textstyle\int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \ {}_tp_{x_1}\mu_1(x_1+t) \ {}_tp_{x_2} \ {}_tp_{x_3}dt] \\
& + S(1,0,1)[\textstyle\int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \ {}_tp_{x_2}\mu_2(x_2+t) \ {}_tp_{x_1} \ {}_tp_{x_3}dt] \\
& + S(1,1,0)[\textstyle\int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \ {}_tp_{x_3}\mu_1(x_1+t) \ {}_tp_{x_1} \ {}_tp_{x_2}dt] \\
& \\
& + S(0,0,1)[\textstyle\int_{t_1<t_2\le n} e^{-\int_0^{t_2} \delta(s)ds} \ {}_{t_1}p_{x_1}\mu_1(x_1+t_1) \ {}_{t_2}p_{x_2}\mu_2(x_2+t_2) \ {}_{t_2}p_{x_3}dt_1dt_2 \\
& + \textstyle\int_{t_2<t_1\le n} e^{-\int_0^{t_1} \delta(s)ds} \ {}_{t_1}p_{x_1}\mu_1(x_1+t_1) \ {}_{t_2}p_{x_2}\mu_2(x_2+t_2) \ {}_{t_1}p_{x_3}dt_1dt_2] \\
& \\
& + S(0,1,0)[\textstyle\int_{t_1<t_3\le n} e^{-\int_0^{t_3} \delta(s)ds} \ {}_{t_1}p_{x_1}\mu_1(x_1+t_1) \ {}_{t_3}p_{x_3}\mu_3(x_3+t_3) \ {}_{t_3}p_{x_2}dt_1dt_3 \\
& + \textstyle\int_{t_3<t_1\le n} e^{-\int_0^{t_1} \delta(s)ds} \ {}_{t_1}p_{x_1}\mu_1(x_1+t_1) \ {}_{t_3}p_{x_3}\mu_3(x_3+t_3) \ {}_{t_1}p_{x_2}dt_1dt_3] \\
& \\
& + S(1,0,0)[\textstyle\int_{t_2<t_3\le n} e^{-\int_0^{t_3} \delta(s)ds} \ {}_{t_2}p_{x_2}\mu_2(x_2+t_2) \ {}_{t_3}p_{x_3}\mu_3(x_3+t_3) \ {}_{t_3}p_{x_1}dt_2dt_3 \\
& + \textstyle\int_{t_3<t_2\le n} e^{-\int_0^{t_2} \delta(s)ds} \ {}_{t_2}p_{x_2}\mu_2(x_2+t_2) \ {}_{t_3}p_{x_3}\mu_3(x_3+t_3) \ {}_{t_2}p_{x_1}dt_2dt_3] \\
& \\
& + S(0,0,0)[\textstyle\int_{t_1<t_2<t_3\le n} e^{-\int_0^{t_3} \delta(s)ds} f_{x_1x_2x_3}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 \\
& + \textstyle\int_{t_2<t_1<t_3\le n} e^{-\int_0^{t_3} \delta(s)ds} f_{x_1x_2x_3}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 \\
& + \textstyle\int_{t_1<t_3<t_2\le n} e^{-\int_0^{t_2} \delta(s)ds} f_{x_1x_2x_3}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 \\
& + \textstyle\int_{t_3<t_1<t_2\le n} e^{-\int_0^{t_2} \delta(s)ds} f_{x_1x_2x_3}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 \\
& + \textstyle\int_{t_2<t_3<t_1\le n} e^{-\int_0^{t_1} \delta(s)ds} f_{x_1x_2x_3}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 \\
& + \textstyle\int_{t_3<t_2<t_1\le n} e^{-\int_0^{t_1} \delta(s)ds} f_{x_1x_2x_3}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3]]
\end{aligned}
$$

Tästä saa hyvin kuvan, kuinka monimutkaiseksi laskelmat voivat mennä kuolemanvaravakuutuksen osalta, kun vakuutettujen määrä kasvaa ja korvauksen määrään vaikuttaa suoraan se ketkä vakuutetuista kuolevat ja missä järjestyksessä. Helpompi tapaus en sellainen, jossa kuolintapauskorvaus riippuu ainoastaan kuolemantapauksen järjestysluvusta, eikä siitä kuka kuolee.

6 Jatkuva vakuutusmaksuintensiteetti

Kahdessa aikaisemmassa luvussa olemme olettaneet, että vakuutetut maksavat vakuutusmaksun kokonaisuudessaan vakuutuskauden alussa. Yleistä kuitenkin on, että vakuutusmaksua ei makseta yhdessä erässä, vaan sitä maksetaan esimerkiksi vuosittain tai kuukausittain. Kuten aikaisemminkin, vakuutusmaksusuoritusten täytyy vastata tulevien korvausten odotusarvoa. Nyt kuitenkin huomioon täytyy ottaa, että vakuutusmaksua maksetaan useammalla eri ajan hetkellä tai jatkuvasti.

Lisäksi, koska kyseessä on usean vakuutetut henkivakuutukset, voidaan sopimus räätälöidä siten, että vakuutusmaksuitensiteetti riippuu siitä ketkä vakuutetuista ovat elossa maksuhetkellä.

Kahden vakuutetun tapauksessa on usein määritelty, että vakuutusmaksua maksetaan ainoastaan ensimmäiseen kuolinhetkeen asti. Voidaan myös sopia, että vakuutusmaksua maksetaan vain, jos esimerkiksi pariskunnasta paremmin ansaitseva osapuoli on elossa.

Oletetaan siis, että vakuutusmaksuintensiteetti on niin sanotusti tilasidonnainen eli että vakuutusmaksun suuruus riippuu ainoastaan siitä missä tilassa prosessi on tarkasteltavalla ajanhetkellä.

On myös mahdollista sopia, että vakuutusmaksua maksetaan vain jokin tietty ajanjakso. Esimerkiksi, jos vakuutuskausi on n vuoden mittainen, maksetaan vakuutusmaksua sovitulla intensiteetillä, niin kauan kun kaikki vakuutetut ovat elossa tai korkeintaan $h \leq n$ vuotta.

Määritelmä 6.1. *(Nyrhinen) Jos vakuutuskauden alussa maksettavan vakuutusmaksun suuruus on P, niin h vuotta maksettava jatkuva vakuutusmaksuintensiteetti $\overline{P}$ saadaan yhtälöstä*

$$P = \overline{P} \int_0^h e^{-\int_0^t (\delta(s)+\mu_1(x_1+s)+\ldots+\mu_N(x_N+s))ds} dt = \overline{P}\overline{a}_{x_1:\ldots:x_N:\overline{h}|}.$$

Siis jatkuva vakuutusmaksuintensiteetti on

$$\overline{P} = \frac{P}{\overline{a}_{x_1:\ldots:x_N:\overline{h}|}},$$

jossa P on kuten edellisissä luvuissa riippuen siitä, mikä vakuutustyyppi on kyseessä. Tässä $\overline{a}_{x_1:\ldots:x_N:\overline{h}|}$ on N:n vakuutetun jatkuvamaksuisen yksikköeläkevakuutuksen nettokertamaksu kuten yhtälössä **??**.

Pohditaan seuraavaksi tilannetta, jossa vakuutusmaksuintensiteetti muuttuu riippuvaksi siitä, ketkä vakuutetuista on elossa. Vakuutusmaksuintensiteetti hetkellä t riippuu siis siitä, missä tilassa prosessi on tuolla hetkellä.

Erikoistapauksena tässä saattaisi olla esimerkiksi se, että intensiteetti riippuisi siitä, kuinka monta vakuutettua on elossa. Tällöin ei olisi väliä sillä ketkä ovat elossa, vaan ainoastaan elossa olevien lukumäärällä.

Edelleenkin myös tässä tapauksessa, täytyy vakuutusmaksuja saada yhteensä kokonaisuudessaan ekvivalenssiperiaatteeen mukainen määrä P. Tällöin

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big[e^{-\int_0^s \delta(r)dr} \sum_{\substack{k_j=0 \\ j=1,\ldots,N}}^{1} \overline{P}(k_1, \ldots, k_N)$$

$$\mathbf{P}(Y(s) = (k_1, \ldots, k_N), \quad t_i < s \leq t_{i+1}) \Big] ds,$$

jossa $t_0 = 0$ ja $t_n = n$.

Jos prosessi on tilassa $Y(s) = (k_1, \ldots, k_N)$ aikavälillä $(t_i, t_{i+1}]$, maksetaan tällöin vakuutusmaksua vakiointensiteetillä $\overline{P}(k_1, \ldots, k_N)$ kyseisellä aikavalillä. Ekvivalenssiperiaatteen mukainen kertamaksuinen vakuutusmaksu P saadaan painottamalla vakuutusmaksuintensiteetit $\overline{P}(k_1, \ldots, k_N)$ vastaavilla tilojen toteutumistodennäköisyyksillä, summaamalla kaikki mahdolliset tapaukset ja diskonttaamalla summa hetkeen 0. Tämän jälkeen summataan vielä yhteen kaikki aikavälit $(t_i, t_{i+1}]$.

Esimerkki 6.1. *Tarkastellaan uudestaan Esimerkkiä 4.1. Oletetaan nyt, että vakuutuskauden pituus on $n = 35$ vuotta ja vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti intensitettillä $\overline{P}$ vakuutuskauden ensimmäiset $h = 20$ vuotta, kuitenkin korkeintaan niin kauan, kun kaikki vakuutetut ovat elossa.*

Olkoon vakuutettujen iät $x_1 = 25, x_2 = 28$ ja $x_3 = 30$ ja määräytyköön niitä vastaavat kuolevuudet Gompertzin kuolevuusfunktion $\mu(x_j) = be^{cx_j}$ mukaisesti, kun $b = 0,0003$ ja $c = 0,07$. Olkoon lisäksi korkoutuvuus vakio $\delta = 0,05$.

Olkoon k jokin positiivinen vakio ja maksettavat korvaukset $S(1,0,0) = 3k$, $S(0,1,0) = 4k$, $S(0,0,1) = 5k$, $S(1,1,0) = 10k$, $S(1,0,1) = 11k$, $S(0,1,1) = 11k$ ja $S(1,1,1) = 25k$. Määrätään nyt vakuutusmaksuintensiteetti $\overline{P}$.

Tällöin esimerkin 4.1 perusteella saadaan

$$\begin{cases} S^*(1) = & 3k \\ S^*(2) = & 4k \\ S^*(3) = & 5k \\ S^*(1,2) = & 10k - 3k - 4k = 3k \\ S^*(1,3) = & 11k - 3k - 5k = 3k \\ S^*(2,3) = & 11k - 4k - 5k = 2k \\ S^*(1,2,3) = & S(1,1,1) - S(1,0,0) - S(0,1,0) - S(0,0,1) \\ & -[S(1,1,0) - S(1,0,0) - S(0,1,0)] \\ & -[S(1,0,1) - S(1,0,0) - S(0,0,1)] \\ & -[S(0,1,1) - S(0,1,0) - S(0,0,1)] \\ = & 25k - 10k - 11k - 11k + 3k + 4k + 5k = 5k \end{cases}$$

Tällöin nettokertamaksuksi saadaan

$$\begin{aligned} P = \;& 5kA_{x_1x_2x_3:\overline{n}|}(V) + 3kA_{x_1x_2:\overline{n}|}(V) + 3kA_{x_1x_3:\overline{n}|}(V) \\ & +2kA_{x_2x_3:\overline{n}|}(V) + 3kA_{x_1:\overline{n}|}(V) + 4kA_{x_2:\overline{n}|}(V) + 5kA_{x_3:\overline{n}|}(V) \\ = \;& 5ke^{-\int_0^n(\delta(s)+\mu(x_1+s)+\mu(x_2+s)+\mu(x_3+s))ds} + 3ke^{-\int_0^n(\delta(s)+\mu(x_1+s)+\mu(x_2+s))ds} \\ & +3ke^{-\int_0^n(\delta(s)+\mu(x_1+s)+\mu(x_3+s))ds} + 2ke^{-\int_0^n(\delta(s)+\mu(x_2+s)+\mu(x_3+s))ds} \\ & +3ke^{-\int_0^n(\delta(s)+\mu(x_1+s))ds} + 4ke^{-\int_0^n(\delta(s)+\mu(x_2+s))ds} + 5ke^{-\int_0^n(\delta(s)+\mu(x_3+s))ds} \\ = \;& 5ke^{-\int_0^n(0{,}05+0{,}0003(e^{0{,}07(25+s)}+e^{0{,}07(28+s)}+e^{0{,}07(30+s)}}))ds \\ & +3ke^{-\int_0^n(0{,}05+0{,}0003(e^{0{,}07(25+s)}+e^{0{,}07(28+s)}))ds} \\ & +3ke^{-\int_0^n(0{,}05+0{,}0003(e^{0{,}07(25+s)}+e^{0{,}07(30+s)}))ds} \\ & +2ke^{-\int_0^n(0{,}05+0{,}0003(e^{0{,}07(28+s)}+e^{0{,}07(30+s)}))ds} \\ & +3ke^{-\int_0^n(0{,}05+0{,}0003(e^{0{,}07(25+s)}))ds} + 4ke^{-\int_0^n(0{,}05+0{,}0003(e^{0{,}07(28+s)}))ds} \\ & +5ke^{-\int_0^n(0{,}05+0{,}0003(e^{0{,}07(30+s)}))ds} \\ = \;& 5ke^{-1{,}75-\frac{0{,}0003}{0{,}07}(e^{2{,}45}-1)(e^{1{,}75}+e^{1{,}96}+e^{2{,}1})} \\ & +3ke^{-1{,}75-\frac{0{,}0003}{0{,}07}(e^{2{,}45}-1)(e^{1{,}75}+e^{1{,}96})} \\ & +3ke^{-1{,}75-\frac{0{,}0003}{0{,}07}(e^{2{,}45}-1)(e^{1{,}75}+e^{2{,}1})} \\ & +2ke^{-1{,}75-\frac{0{,}0003}{0{,}07}(e^{2{,}45}-1)(e^{1{,}96}+e^{2{,}1})} \\ & +3ke^{-1{,}75-\frac{0{,}0003}{0{,}07}(e^{2{,}45}-1)e^{1{,}75}} + 4ke^{-1{,}75-\frac{0{,}0003}{0{,}07}(e^{2{,}45}-1)e^{1{,}96}} \\ & +5ke^{-1{,}75-\frac{0{,}0003}{0{,}07}(e^{2{,}45}-1)e^{2{,}1}} \\ \approx \;& 2{,}58k \end{aligned}$$

jolloin vakuutusmaksuintensiteetti $\overline{P}$ *on*

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \frac{P}{\overline{a}_{x_1:x_2:x_3:\overline{20}|}} \\
&= \frac{2,58k}{\int_0^{20} e^{-\int_0^t (0,05+\mu(25+s)+\mu(28+s)+\mu(30+s))ds} dt} \\
&= \frac{2,58k}{\int_0^{20} e^{-0,05t-\frac{0,0003}{0,07}(e^{0,07t}-1)(e^{1,75}+e^{1,96}+e^{2,1})} dt} \\
&= \frac{2,58k}{14,06} = 0,18k
\end{aligned}$$

Eli jos ajatellaan esimerkiksi, että $k = 1000$*, niin tällöin vakuutusmaksuintensiteetti olisi* $\overline{P} = 180$.

7 Vastuuvelka

Vastuuvelka on vakuutusyhtiölle tärkeä apuväline riskien hallitsemiseksi. Sen avulla voidaan päätellä, millainen yhtiön taloudellinen tilanne on. Sen avulla voidaan myös määritellä yhtiön tekemän tuloksen, voiton tai tappion, suuruus.

Vastuuvelka koostuu kahdesta osasta. Ensimmäisen osan muodostaa niin sanottu korvausvastuu, joka koostuu jo tapahtuneista, vielä maksamatta olevista, vakuutustapahtumista. Toinen osa vastuuvelasta koostuu yhtiölle maksettavista vakuutusmaksuista, jotka ovat siis tulevaisuudessa tapahtuvien vakuutustapahtumien pääoma-arvoja. Vastuuvelka on näiden kahden osan erotus. Intuitiivisesti vakuutetuille maksettavat korvaukset kasvavat ja toisaalta yhtiölle maksettavat vakuutusmaksut taas vähenevät sopimuskauden kuluessa. Ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti näiden täytyy kuitenkin vastata toisiaan koko vakuutuskauden ajalta.

Usean vakuutetun tapauksessa vastuuvelan suuruus riippuu olennaisesti siitä, ketkä vakuutetuista ovat elossa ja ketkä kuolleet. Käytännössä vastuuvelan laskennassa otetaan huomioon myös erilaiset yhtiölle aiheutuvat kulut ja sijoituksista saatavat tuotot. Tarkastellaan kuitenkin tässä vastuuvelkaa ilman kuluja ja sijoitustuottoja.

Määritelmä 7.1. *(Dickson et al.)*

Olkoon vakuutettu elossa ajanhetkellä $t \geq 0$. Tällöin vastuuvelka hetkellä t on

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \textit{tulevien korvausten nykyarvon odotusarvo} \\
&\quad - \textit{tulevien maksujen nykyarvon odotusarvo.}
\end{aligned}
$$

Useamman vakuutetun tapauksessa vastuuvelka ajatellaan riippuvaiseksi siitä, missä tilassa prosessi on kullakin ajanhetkellä. Merkitään vastuuvelkaa hetkellä t tilassa $Y(t)$ symbolilla $V(t, Y(t))$.

7.1 Elämänvaravakuutuksen vastuuvelka

Aloitetaan jälleen tarkastelemalla aluksi vastuuvelkaa elämänvaravakuutuksen osalta, kun kyseessä on kahden hengen elämänvaravakuutus. Tällöin siis vakuutusmaksut ja korvaukset ovat luvun 4.1 mukaiset. Lisäksi, jos vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti koko vakuutuskauden ajan, määräytyy maksuintensiteetti luvun 6 perusteella. Nyt, jos vain toinen vakuutetuista on elossa hetkellä t, on vastuuvelka kuten yhden vakuutetun tapauksessa. Tämä johtuu siitä, että kun toinen vakuutetuista on jo kuollut, otetaan huomioon ainoastaan elossaolevan osalta maksettavat vakuutusmaksut ja mahdollinen korvaus hetkellä n. Oletetaan ensin, että vakuutettu 1 on elossa ja vakuutettu 2 kuollut hetkellä t. Tällöin vastuuvelka hetkellä t on [Nyrhinen]

$$\begin{aligned}V(t,(1,0)) = \ & \mathbf{E}\Big[e^{-\int_t^n \delta(s)ds} S(1,0)\mathbf{1}(T_{x_1+t} > n-t)\Big] \\ & -\mathbf{E}\Big[\int_t^n e^{-\int_t^u \delta(s)ds}\overline{P}(1,0)\mathbf{1}(T_{x_1+t} > u-t)du\Big] \\ = \ & e^{-\int_t^n \delta(s)ds} S(1,0)\ {}_{n-t}p_{x_1+t} \\ & -\int_t^n e^{-\int_t^u \delta(s)ds}\overline{P}(1,0)\ {}_{u-t}p_{x_1+t}du\end{aligned}$$

Vastuuvelka lasketaan aivan vastaavasti, jos vakuutettu 1 on kuollut ja vakuutettu 2 elossa. Siis ainoastaan tapaus, jossa molemmat vakuutetut ovat elossa hetkellä t, poikkeaa yhden vakuutetun tapauksesta. Tällöin vastuuvelka on

$$\begin{aligned}V(t,(1,1)) = \ & \mathbf{E}\Big[e^{-\int_t^n \delta(s)ds} \\ & \big[S(0,1)\mathbf{1}(T_{x_1+t} > n-t, T_{x_2+t} < n-t) \\ & +S(1,0)\mathbf{1}(T_{x_1+t} < n-t, T_{x_2+t} > n-t) \\ & +S(1,1)\mathbf{1}(T_{x_1+t} > n-t, T_{x_2+t} > n-t)\big]\Big] \\ & -\mathbf{E}\Big[\int_t^n e^{-\int_t^u \delta(s)ds}\big[\overline{P}(1,1)\mathbf{1}(T_{x_1+t} > u-t, T_{x_2+t} > u-t) \\ & +\overline{P}(0,1)\mathbf{1}(T_{x_1+t} < u-t, T_{x_2+t} > u-t) \\ & +\overline{P}(1,0)\mathbf{1}(T_{x_1+t} > u-t, T_{x_2+t} < u-t)\big]du\Big] \\ \\ = \ & e^{-\int_t^n \delta(s)ds}\Big[S(0,1)\ {}_{n-t}p_{x_1+t}\ {}_{n-t}q_{x_2+t} \\ & +S(1,0)\ {}_{n-t}q_{x_1+t}\ {}_{n-t}p_{x_2+t} + S(1,1)\ {}_{n-t}p_{x_1+t}\ {}_{n-t}p_{x_2+t}\Big] \\ & -\int_t^n e^{-\int_t^u \delta(s)ds}\Big[\overline{P}(1,1)\ {}_{u-t}p_{x_1+t}\ {}_{u-t}p_{x_2+t} \\ & +\overline{P}(0,1)\ {}_{u-t}q_{x_1+t}\ {}_{u-t}p_{x_2+t} \\ & +\overline{P}(1,0)\ {}_{u-t}p_{x_1+t}\ {}_{u-t}q_{x_2+t}\Big]du\end{aligned}$$

Toisaalta voidaan ajatella, että vastuuvelkaa hetkellä t lasketaan ennen kuin oikeastaan tiedetään, missä tilassa prosessi tulee olemaan tuolla hetkellä. Tällöin voidaan laskea vastuuvelka tarkastelemalla jokaista mahdollista vaihtoehtoa ja ehdollistamalla ne sillä, että prosessi on tilassa $Y(t)$ hetkellä t. Tässä tapauksessa tarkasteltaisiin siis ennakolta mahdollisia tulevia vastuuvelkoja jo ennen kuin tiedetään, mikä tilanne todellisuudessa tulee olemaan hetkellä t. Tämä on kuitenkin yhtiön osalta kenties jopa toivottavaa, koska yhtiölle on tärkeää arvioida myös tulevien riskien suuruutta, jotta se voi suunnitella liiketoimintansa tarvittavan vakavaraisuuden säilyttämiseksi. Todellisuudessa yhtiöt tarkastelevat vastuuvelkoja ja vakavaraisuutta pääasiassa koko vakuutuskantansa osalta. Tärkeää on kuitenkin myös, että yksittäiset vakuutukset ovat yhtiön kannalta kannattavia. Se on lopulta myös asiakkaan etu, että yhtiö pysyy toimintakykyisenä ja näin ollen pystyy huolehtimaan tulevista korvauksista.

Kun kyseessä on yleinen tapaus elämänvaravakuutuksesta, jossa vakuutettuja on N kappaletta, riippuu vastuuvelan suuruus hetkellä t siitä, ketkä vakuutetusta ovat tällöin elossa. Tulevien korvausten pääoma-arvo lasketaan kuten nettokertamaksu kappaleessa 4, ottaen kuitenkin huomioon lyhentynyt vakuutusaika ja se, ketkä vakuutetuista ovat elossa hetkellä t. Myös tulevien maksujen pääoma-arvo lasketaan kuten kappaleessa 4, ottaen kuitenkin huomioon ketkä vakuutetuista ovat elossa tarkasteluhetkellä.

7.2 Kuolemanvaravakuutuksen vastuuvelka

Kuolemanvaravakuutuksen osalta vastuuvelka lasketaan aivan vastaavasti kuin elämänvaravakuutuksenkin tapauksessa. Edelleen perusperiaatteena on tulevien korvausten ja maksujen pääoma-arvojen erotuksen laskeminen. Aloitetaan myös nyt kahden vakuutetun tapauksesta hetkellä t ja oletetaan, että vakuutettu 1 on tällöin elossa ja vakuutettu 2 on kuollut. Tällöin siis vain vakuutettu 1 maksaa vakuutusmaksua (mikäli näin on sovittu) ja vain korvaus $S(0,0)$ on maksamattomista mahdollinen. Jälleen tässä tapauksessa vastuuvelka on kuten yhden vakuutetun tapauksessa [Nyrhinen].

$$\begin{aligned}
V(t,(1,0)) = \; & \mathbf{E}\Big[e^{-\int_t^{T_{x_1+t}}\delta(s)ds}S(0,0)\mathbf{1}(T_{x_1+t}\le n-t)\Big] \\
& -\mathbf{E}\Big[\int_t^n e^{-\int_t^u\delta(s)ds}\overline{P}(1,0)\mathbf{1}(T_{x_1+t}>u-t)\Big]du \\
= \; & \int_t^n e^{-\int_t^u\delta(s)ds}\Big[S(0,0)\mu_1(x_1+t)\;{}_{u-t}q_{x_1+t} \\
& -\overline{P}(1,0)\;{}_{u-t}p_{x_1+t}\Big]du.
\end{aligned}$$

Jos molemmat vakuutetut ovat elossa hetkellä t, saadaan vastuuvelaksi

$$\begin{aligned}
V(t,(1,1)) = \; & \mathbf{E}\Big[e^{-\int_t^{T_{x_1+t}}\delta(s)ds}S(0,1)\mathbf{1}(T_{x_1+t}\le n-t, T_{x_1+t}<T_{x_2+t}) \\
& +e^{-\int_t^{T_{x_2+t}}\delta(s)ds}S(1,0)\mathbf{1}(T_{x_2+t}\le n-t, T_{x_2+t}<T_{x_1+t}) \\
& +S(0,0)\big[e^{-\int_t^{T_{x_1+t}}\delta(s)ds}\mathbf{1}(T_{x_1+t}\le n-t, T_{x_2+t}<T_{x_1+t}) \\
& +e^{-\int_t^{T_{x_2+t}}\delta(s)ds}\mathbf{1}(T_{x_2+t}\le n-t, T_{x_1+t}<T_{x_2+t})\big]\Big] \\
& -\mathbf{E}\Big[\int_t^n e^{-\int_t^u\delta(s)ds}\big[\overline{P}(1,1)\mathbf{1}(T_{x_1+t}>u-t, T_{x_2+t}>u-t) \\
& +\overline{P}(0,1)\mathbf{1}(T_{x_1+t}\le u-t, T_{x_2+t}>u-t) \\
& +\overline{P}(1,0)\mathbf{1}(T_{x_1+t}>u-t, T_{x_2+t}\le u-t)\big]du\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \int_t^n e^{-\int_t^u \delta(s)ds}\Big[S(0,1)\mu_1(x_1+u)\ {}_{u-t}p_{x_1+t}\ {}_{u-t}p_{x_2+t}du \\
& +S(1,0)\mu_2(x_2+u)\ {}_{u-t}p_{x_2+t}\ {}_{u-t}p_{x_1+t}du\Big] \\
& +S(0,0)\Big[\int_{u_1<u_2\le n} e^{-\int_t^u \delta(s)ds} f_{x_1+t:x_2+t}(u_1-t,u_2-t)du_1du_2 \\
& +\int_{u_2<u_1\le n} e^{-\int_t^u \delta(s)ds} f_{x_1+t:x_2+t}(u_1-t,u_2-t)du_1du_2\Big] \\
& -\int_t^n e^{-\int_t^u \delta(s)ds}\Big[\overline{P}(1,1)\ {}_{u-t}p_{x_1+t}\ {}_{u-t}p_{x_2+t} \\
& +\overline{P}(0,1)\mu_1(x_1+u)\ {}_{u-t}p_{x_1+t}\ {}_{u-t}p_{x_2+t} \\
& +\overline{P}(1,0)\mu_2(x_2+u)\ {}_{u-t}p_{x_2+t}\ {}_{u-t}p_{x_1+t}\Big]du.
\end{aligned}
$$

Aivan kuten elämänvaravakuutuksen tapauksessakin, yleinen N:n vakuutetun kuolemanvaravakuutuksen vastuuvelka lasketaan tulevien korvausten ja maksujen pääoma-arvojen erotuksena, ottaen molemmissa huomioon se, ketkä vakuutetuista ovat elossa tarkasteluhetkellä t.

8 Thielen yhtälö

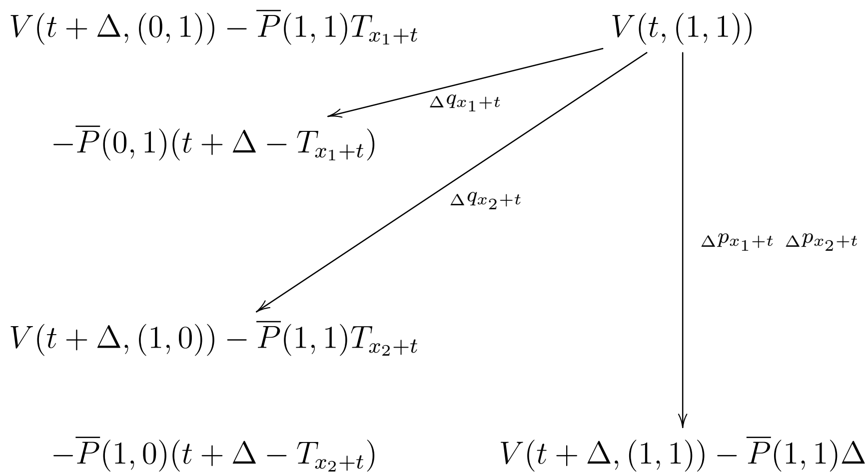
Kuten edellisessä luvussa huomattiin, on vastuuvelan suuruus varsin erilainen riippuen siitä, missä tilassa Y(t) ollaan hetkellä t. Yhtiön kannalta voidaankin pohtia, miten helposti ennakoitavissa vastuuvelan muutokset ovat. Näiden muutoksien laskemisessa käytetään apuna *Thielen yhtälöä*. Se kuvaa vastuuvelan muutosta pienen aikavälin Δ kuluessa, kun tiedetään lähtötilanne hetkellä t. Thielen yhtälön avulla voidaan siis arvioida vastuuvelan muutoksia.

Yhteen vakuutussopimukseen liittyvän vastuuvelan muutos ei ole yhtiölle kovinkaan ratkaisevaa, mutta yhtiön on tärkeä seurata kaikkien vakuutussopimustensa yhteenlaskettua vastuuvelan trendiä.

Tässä luvussa johdamme Thielen yhtälöt elämänvara- ja kuolemanvaravakuutuksille käyttämällä virtausajattelua. Sen avulla Thielen yhtälön muodostaminen hahmottuu helposti.

8.1 Thielen yhtälö elämänvaravakuutukselle

Havainnoillistetaan Thielen yhtälön johtamista kahden vakuutetun elämänvaravakuutuksen tapauksessa seuraavalla virtauskaaviolla. Olkoon $t \in (0, n)$ ja $\Delta > 0$. Oletetaan, että hetkellä t prosessi on tilassa (1,1). Kaaviossa nuolet kuvaavat mahdollisia tapahtumia aikavälillä $(t, t + \Delta]$ ja nuolien vieressä on mainittu kyseisen tapahtuman todennäköisyys. Kuten kuvasta käy ilmi, ei tässä oteta huomioon mahdollisuutta, että molemmat vakuutetut kuolisivat pienen aikavälin Δ kuluessa. Tämä perustuu siihen, että todennäköisyys, että molemmat vakuutetut kuolevat aikavälin Δ kuluessa on $o(\Delta)$, jossa $o(\Delta) \to 0$, kun $\Delta \to 0$.



Vastuuvelka hetkellä t, kun tällöin ollaan tilassa (1,1), on $V(t,(1,1))$. Ylin nuoli kuvaa tapausta, jossa vakuutettu 1 kuolee aikavälillä $(t, t+\Delta)$. Tällöin hetkellä $t+\Delta$ ollaan siis tilassa (0,1). Aikavälillä $(t, t+\Delta)$ vakuutusmaksuja on maksettu vakuutetun 1 kuolemaan asti intensiteetillä $\overline{P}(1,1)$ ja tämän jälkeen intensiteetillä $\overline{P}(0,1)$. Kertoimet näihin tulevat maksuaikojen pituuksista. Muut tapaukset rakentuvat vastaavasti.

Nyt painottamalla jokainen siirtymävaihtoehto vastaavalla todennäköisyydellä, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} V(t,(1,1)) = \; & {}_{\Delta}q_{x_1+t}\Big[V(t+\Delta,(0,1)) - \overline{P}(1,1)T_{x_1+t} \\ & -\overline{P}(0,1)(t+\Delta-T_{x_1+t})\Big] + {}_{\Delta}q_{x_2+t}\Big[V(t+\Delta,(1,0)) \\ & -\overline{P}(1,1)T_{x_2+t}) - \overline{P}(1,0)(t+\Delta-T_{x_2+t})\Big] \\ & +(1-{}_{\Delta}q_{x_1+t})(1-{}_{\Delta}q_{x_2+t})e^{-\int_t^{t+\Delta}\delta(s)ds} \\ & \Big[V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{P}(1,1)\Delta\Big] + o(\Delta). \end{aligned}$$

Yhtälön saattamiseksi differentiaalimuotoon, käytämme apuna seuraavia yhtälöitä

$$ {}_{\Delta}q_{x+t} = \mu(x+t)\Delta + o(\Delta) \tag{8.1}$$

$$ e^{-\int_t^{t+\Delta}\delta(s)ds} = 1 - \delta(t)\Delta + o(\Delta). \tag{8.2}$$

Näistä ensimmäinen seuraa suoraan kuolevuusintensiteetin määritelmästä 3.1.

Tällöin tarkasteltava yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned} V(t,(1,1)) = \; & \big[\mu_1(x_1+t)\Delta + o(\Delta)\big]\big[V(t+\Delta,(0,1)) - \overline{P}(1,1)T_{x_1+t} \\ & -\overline{P}(0,1)(t+\Delta-T_{x_1+t})\big] \\ & +\big[\mu_2(x_2+t)\Delta + o(\Delta)\big]\big[V(t+\Delta,(1,0)) - \overline{P}(1,1)T_{x_2+t} \\ & -\overline{P}(1,0)(t+\Delta-T_{x_2+t})\big] \\ & +\big[1-\mu_1(x_1+t)\Delta - \mu_2(x_2+t)\Delta + o(\Delta)\big] \\ & \big[1-\delta(t)\Delta + o(\Delta)\big]\big[V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{P}(1,1)\Delta\big] \\ \\ = \; & \mu_1(x_1+t)V(t,(0,1))\Delta + \mu_2(x_2+t)V(t,(1,0))\Delta \\ & +\big[1-\mu_1(x_1+t)\Delta - \mu_2(x_2+t)\Delta\big]\big[1-\delta(t)\Delta\big] \\ & (V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{P}(1,1)\Delta) + o(\Delta) \\ \\ = \; & \mu_1(x_1+t)V(t,(0,1))\Delta + \mu_2(x_2+t)V(t,(1,0))\Delta \\ & \big[1-\delta(t)\Delta - \mu_1(x_1+t)\Delta - \mu_2(x_2+t)\Delta\big] \\ & \big[V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{P}(1,1)\Delta\big] + o(\Delta) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \mu_1(x_1+t)V(t,(0,1))\Delta + \mu_2(x_2+t)V(t,(1,0))\Delta \\
& + V(t+\Delta,(1,1)) - \delta(t)V(t,(1,1))\Delta - \overline{P}(1,1)\Delta \\
& - \mu_1(x_1+t)V(t,(1,1))\Delta - \mu_2(x_2+t)V(t,(1,1))\Delta + o(\Delta).
\end{aligned}
$$

Sijoittelemalla termit toisin, tästä saadaan differentiaaliyhtälö vastuuvelalle, jota siis kutsumme Thielen yhtälöksi kahden hengen elämänvaravakuutukselle.

$$
\begin{aligned}
V'(t,(1,1)) = \;& \lim_{\Delta\to 0} \frac{V(t+\Delta,(1,1)) - V(t,(1,1))}{\Delta} \\
= \;& \delta(t)V(t,(1,1)) + \overline{P}(1,1) \\
& - \mu_1(x_1+t)\big[V(t,(0,1)) - V(t,(1,1))\big] \\
& - \mu_2(x_2+t)\big[V(t,(1,0)) - V(t,(1,1))\big].
\end{aligned}
$$

Intuitiivisesti N:lle vakuutetulle Thielen yhtälöksi saadaan

$$
V'(t,(k_1,\ldots,k_N)) = \delta(t)V(t,(k_1,\ldots,k_N)) + \overline{P}((k_1,\ldots,k_N))
$$

$$
- \sum_{\substack{j=1 \\ k_j=1}}^{N} \mu_j(x_i+t)\big[V(t, Y(t+\Delta) = (k_1,\ldots,k_{j-1},0,k_{j+1},\ldots,k_N))
$$

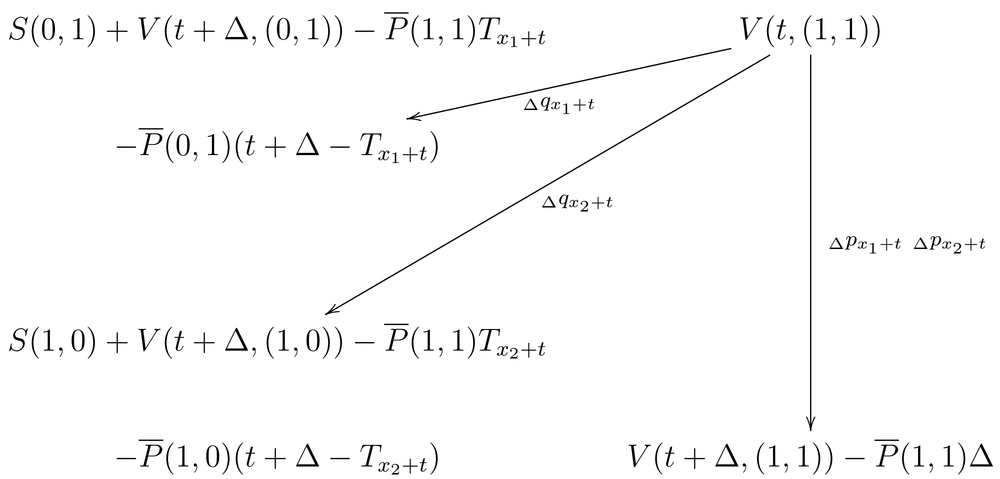
$$
- V(t, Y(t) = (k_1,\ldots,k_{j-1},1,k_{j+1}\ldots,k_N)\big],
$$

jossa siis summa käy läpi kaikki elossa olevat vakuutetut j ja pienellä rajoitetulla aikavälillä muiden vakuutettujen tilat säilyvät, mutta vakuutettu j kuolee.

Kun Thielen differentiaaliyhtälö halutaan ratkaista, on tärkeää tietää myös mahdolliset reunaehdot saaduille ratkaisuille. Elämänvaravakuutukselle ne määräytyvät kuitenkin melko intuitiivisesti. Tiedämme, että vakuutuskauden alussa tulevien maksujen ja tulevien korvausten täytyy olla ekvivalenssiperiaatteen mukaan yhtä suuret. Tämän vuoksi vakuutuskauden alussa $V(0,Y(0)) = 0$. Lisäksi tiedetään, että elämänvaravakuutuksen korvaukset maksetaan vakuutuskauden lopussa hetkellä n, joten $V(n,Y(n)) = S(Y(n))$. Tämä ei ole siis yksikäsitteinen, vaan riippuu siitä tilasta, jossa prosessi on hetkellä n.

8.2 Thielen yhtälö kuolemanvaravakuutukselle

Johdetaan nyt Thielen yhtälö vastaavasti myös kahden hengen kuolemanvaravakuutukselle. Toisin kuin elämänvaravakuutuksessa, kuolemanvaravakuutuksen virtauskaaviossa (ja siis myös Thielen yhtälössä) esiintyvät luonnollisesti myös tapausta vastaavat kuolemantapauskorvaukset.



Jälleen painottamalla muutosvaihtoehdot niitä vastaavilla todennäköisyyksillä saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
V(t,(1,1)) = \; & {}_{\Delta}q_{x_1+t}\Big[S(0,1) + V(t+\Delta,(0,1)) - \overline{P}(1,1)T_{x_1+t} \\
& -\overline{P}(0,1)(t+\Delta - T_{x_1})\Big] + \; {}_{\Delta}q_{x_2+t}\Big[S(1,0) + V(t+\Delta,(1,0)) \\
& -\overline{P}(1,1)T_{x_2+t}) - \overline{P}(1,0)(t+\Delta - T_{x_2+t})\Big] \\
& +(1 - \; {}_{\Delta}q_{x_1+t})(1 - \; {}_{\Delta}q_{x_2+t})e^{-\int_t^{t+\Delta}\delta(s)ds} \\
& \Big[V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{P}(1,1)\Delta\Big] + o(\Delta) \\
= \; & \big[\mu_1(x_1+t)\Delta + o(\Delta)\big]\big[S(0,1) + V(t+\Delta,(0,1)) - \overline{P}(1,1)T_{x_1+t} \\
& -\overline{P}(0,1)(t+\Delta - T_{x_1+t})\big] \\
& +\big[\mu_2(x_2+t)\Delta + o(\Delta)\big]\big[S(1,0) + V(t+\Delta,(1,0)) - \overline{P}(1,1)T_{x_2+t} \\
& -\overline{P}(1,0)(t+\Delta - T_{x_2+t})\big] \\
& +\big[1 - \mu_1(x_1+t)\Delta - \mu_2(x_2+t)\Delta + o(\Delta)\big] \\
& \big[1 - \delta(t)\Delta + o(\Delta)\big]\big[V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{P}(1,1)\Delta\big] + o(\Delta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \mu_1(x_1+t)S(0,1)\Delta + \mu_1(x_1+t)V(t,(0,1))\Delta + \mu_2(x_2+t)S(1,0)\Delta \\
& +\mu_2(x_2+t)V(t,(1,0))\Delta + \big[1-\mu_1(x_1+t)\Delta - \mu_2(x_2+t)\Delta - \delta(t)\Delta\big] \\
& \big[V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{P}(1,1)\Delta\big] + o(\Delta) \\
\\
= \;& V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{P}(1,1)\Delta - \delta(t)V(t,(1,1))\Delta \\
& +\mu_1(x_1+t)\big[V(t,(0,1)) - V(t,(1,1))\big]\Delta \\
& +\mu_2(x_2+t)\big[V(t,(1,0)) - V(t,(1,1))\big]\Delta \\
& +\mu_1(x_1+t)S(0,1)\Delta + \mu_2(x_2+t)S(1,0)\Delta + o(\Delta).
\end{aligned}
$$

Siirtämällä termejä puolelta toiselle ja jakamalla puolittain Δ:lla, saadaan Thielen yhtälöksi

$$
\begin{aligned}
V'(t,(1,1)) = \;& \lim_{\Delta\to 0} \frac{V(t+\Delta,(1,1)) - V(t,(1,1))}{\Delta} \\
= \;& \delta(t)V(t,(1,1))\overline{P}(1,1) \\
& -\mu_1(x_1+t)\big[S(0,1) + V(t,(0,1)) - V(t,(1,1))\big] \\
& -\mu_2(x_2+t)\big[S(1,0) + V(t,(1,0)) - V(t,(1,1))\big].
\end{aligned}
$$

Kuolemanvaravakuutukselle luontevat alkuehdot ovat $V(0,Y(0)) = 0$ ja $V(n,Y(n)) = 0$. Näistä jälkimmäinen perustuu vakuutuksen korvausperusteisiin; kuolemanvaravakuutuksen osalta hetken n jälkeen ei makseta enää korvauksia eli hetkeen n mennessä on jo maksettu kaikki mahdolliset korvaukset ja tämän jälkeen yhtiön maksusitoumus päättyy. Ensimmäisessä perustelut ovat samat kuin elämänvaravakuutuksen alkuehdoissa.

9 Bruttovakuutusmaksut

Kappaleissa 4 ja 5 johdimme elämänvara- ja kuolemanvaravakuutuksille nettokertamaksut ekvivalenssiperiaatteen avulla, mutta tällöin oletimme, että maksujen täytyy vastata maksettavia korvauksia. Todellisuudessa yhtiölle aiheutuu vakuutuksista myös muita kuluja, jotka yhtiön täytyy ottaa huomioon vakuutuksien hinnoittelussa. Tällaisia kuluja ovat esimerkiksi vakuutuksen perustamis- ja lopettamiskustannukset, maksujen perimiskustannukset ja korvausten maksukustannukset. Yhtiö voi ottaa myös huomioon vakuutukseen liittyvän riskin kustannukset. Tarkastellaan tässä kappaleessa jatkuvamaksuista elämnvaravakuutusta. Olkoon bruttovakuutusmaksuintensiteetti $\overline{B}$.

Tarkastellaan tässä kappaleessa vakuutusta, johon liittyviä kuluja merkitään seuraavasti (Nyrhinen):

$$\begin{cases} \kappa\overline{B} & \text{maksuun suhteutettu kuormitus} \\ \varepsilon S & \text{korvaukseen suhteutettu kuormitus} \\ I & \text{kiinteä, perustamiskustannukset kattava kuormitus} \end{cases}$$

Oletetaan tässä, että $\kappa, \varepsilon > 0$. Kuten huomataan, tässä suhteutetaan kulut niitä vastaavien tapahtumien suuruuksiin. Siis mitä suuremmat korvaukset ja maksut sitä suuremmat ovat myös niistä aiheutuvat kulut.

Olkoon kyseessä kahden hengen elämänvaravakuutus, jossa vakuutettujen iät hetkellä nolla ovat x_1 ja x_2. Oletetaan edelleen vakuutettujen jäljellä olevat elinajat toisistaan riippumattomiksi. Oletetaan, että vakuutuskausi on n vuotta ja vakuutusmaksua maksetaan $h \leq n$ vuotta. Vakuutuksen hinnoittelussa sovelletaan edelleen ekvivalenssiperiaatetta, mutta nyt täytyy ottaa huomioon siis myös yhtiölle aiheutuvat kulut. Nyt siis vakuutusmaksujen täytyy vastata maksettavien korvauksien ja yhtiölle aiheutuvien kulujen summaa.

Merkitään aluksi kappaleen 4 mukaisesti kahden vakuutetun elämänvaravakuutuksen nettokertamaksua seuraavasti

$$P = [S(1,1) - S(0,1) - S(1,0)]A_{x_1x_2:\overline{n}|}(V) + S(0,1)A_{x_2:\overline{n}|}(V) + S(1,0)A_{x_1:\overline{n}|}.$$

Nyt käyttämällä tätä merkintää ja soveltamalla ekvivalenssiperiaatetta saadaan yhtälö

$$\overline{a}_{x_1:x_2:\overline{h}|}\overline{B} = \quad P + \kappa\overline{B}\overline{a}_{x_1:x_2:\overline{h}|} + \varepsilon S\overline{a}_{x_1:x_2:\overline{n}|} + I.$$

Tästä sijoittelemalla termit toisin bruttokertamaksuksi saadaan

$$\overline{B} = \frac{P + \varepsilon\overline{a}_{x_1:x_2:\overline{n}|} + I}{(1-\kappa)\overline{a}_{x_1:x_2:\overline{h}|}}.$$

Johdetaan uudestaan myös Thielen yhtälö nyt, kun laskennassa otetaan huomioon myös yhtiölle vakuutuksesta aiheutuvat kulut. Käytetään edelleen Thielen yhtälön johtamisessa virtauskaaviota, jossa on siis kappaleeseen 4 verrattuna lisätty vakuutusmaksuihin liittyvät kulut.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{l} V(t+\Delta,(0,1)) - (1-\kappa)\overline{B}(1,1)T_{x_1+t} \\ \quad -(1-\kappa)\overline{B}(0,1)(t+\Delta-T_{x_1+t}) \end{array} & & V(t,(1,1)) \arrow[ll, "{}_{\Delta}q_{x_1+t}"'] \arrow[dll, "{}_{\Delta}q_{x_2+t}"] \arrow[d, "{}_{\Delta}p_{x_1+t}\ {}_{\Delta}p_{x_2+t}"] \\
\begin{array}{l} V(t+\Delta,(1,0)) - (1-\kappa)\overline{B}(1,1)T_{x_2+t} \\ \quad -(1-\kappa)\overline{B}(1,0)(t+\Delta-T_{x_2+t}) \end{array} & & \begin{array}{c} V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{B}(1,1)\Delta \\ +\kappa\overline{B}(1,1)\Delta \end{array}
\end{tikzcd}
$$

Näin ollen saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
V(t,(1,1)) = \;& {}_{\Delta}q_{x_1+t}\Big[V(t+\Delta,(0,1)) - (1-\kappa)\overline{B}(1,1)T_{x_1+t} \\
& -(1-\kappa)\overline{B}(0,1)(t+\Delta-T_{x_1+t})\Big] \\
& + {}_{\Delta}q_{x_2+t}\Big[V(t+\Delta,(1,0)) - (1-\kappa)\overline{B}(1,1)T_{x_2+t} \\
& -(1-\kappa)\overline{B}(1,0)(t+\Delta-T_{x_2+t})\Big] \\
& +e^{-\int_t^{t+\Delta}\delta(s)ds}\ {}_{\Delta}p_{x_1+t}\ {}_{\Delta}p_{x_2+t}\Big[V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{B}(1,1)\Delta \\
& +\kappa\overline{B}(1,1)\Delta\Big] + o(\Delta) \\
= \;& \mu_1(x_1+t)\Delta\Big[V(t+\Delta,(0,1)) - (1-\kappa)\overline{B}(1,1)T_{x_1+t} \\
& -(1-\kappa)\overline{B}(0,1)(t+\Delta-T_{x_1+t})\Big] \\
& +\mu_2(x_2+t)\Delta\Big[V(t+\Delta,(1,0)) - (1-\kappa)\overline{B}(1,1)T_{x_2+t} \\
& -(1-\kappa)\overline{B}(1,0)(t+\Delta-T_{x_2+t})\Big] \\
& +(1-\delta(s)\Delta)(1-\mu_1(x_1+t)\Delta)(1-\mu_2(x_2+t)\Delta) \\
& \Big[V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{B}(1,1)\Delta + \kappa\overline{B}(1,1)\Delta\Big] + o(\Delta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_1(x_1+t)V(t,(0,1))\Delta + \mu_2(x_2+t)V(t,(1,0))\Delta \\
&\quad +(1-\delta(s)\Delta - \mu_1(x_1+t)\Delta - \mu_2(x_2+t)\Delta) \\
&\quad \Big[V(t+\Delta,(1,1)) - \overline{B}(1,1)\Delta + \kappa\overline{B}(1,1)\Delta\Big] + o(\Delta) \\
&= V(t+\Delta,(1,1)) - \delta(s)V(t,(1,1))\Delta - \overline{B}(1,1)\Delta + \kappa\overline{B}(1,1)\Delta \\
&\quad -\mu_1(x_1+t)V(t,(1,1))\Delta - \mu_2(x_2+t)V(t,(1,1))\Delta \\
&\quad +\mu_1(x_1+t)V(t,(0,1))\Delta + \mu_2(x_2+t)V(t,(1,0))\Delta + o(\Delta).
\end{aligned}
$$

Edelleen järjestelemällä termejä uudestaan ja jakamalla Δ:lla saadaan Thielen yhtälöksi

$$
\begin{aligned}
V'(t,(1,1)) = \; & \delta(s)V(t,(1,1)) + (1-\kappa)\overline{B}(1,1) \\
& +\mu_1(x_1+t)\big[V(t,(1,1) - V(t,(0,1))\big] \\
& +\mu_2(x_2+t)\big[V(t,1,1)) - V(t,(1,0))\big].
\end{aligned}
$$

Kuten huomataan, ei Thielen yhtälössä tässä tapauksessa ole muita kuin vakuutusmaksukuormitus. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että kyseessä on elämänvaravakuutus, jolloin maksuhetkiä on ainoastaan yksi eli hetki n. Tällöin luonnollisesti korvauksiin liittyvät kulut aiheutuvat vasta tällöin ja ne otetaan huomioon Thielen yhtälön alkuehdoissa. Alkuehdot ovat siis tässä tapauksessa luonnollisesti $V(0) = I$ ja $V(n) = (1+\varepsilon)S$.

10 Markov prosessi

Tarkastellaan tässä kappaleessa lyhyesti usean vakuutetun henkivakuutuksia lähestymällä ongelmaa Markov -prosessin näkökulmasta. Havainnoillistamalla siirtymiä kaaviokuvan avulla kappaleissa 4 ja 5, olemme raapaisseet pintapuolisesti Markovilaista lähestymistapaa. Perusperiaatteena on nyt siis tarkastella, kuinka prosessi käyttäytyy ajan kuluessa. Sitä lähestytään pohtimalla prosessin tilojen välisiä siirtymätodennäköisyyksiä.

Olkoon vakuutettuja N kappaletta ja olkoon vakuutettujen iät $x_j, j = 1, \dots, N$ sekä kuolevuudet $\mu_j, j = 1, \dots, N$. Merkitään vakuutettujen jäljellä olevia elinaikoja T_{x_j}:llä, $j = 1, \dots, N$ ja oletetaan, että vakuutettujen elinajat ovat toisistaan riippumattomia. Mallinnetaan stokastisena prosessina $\{Y(t) \mid t \geqslant 0\}$, missä $Y(t) = (y_1, \dots, y_N) \in E$, missä E on kaikki mahdolliset tilavariaatiot käsittävä tiila-avaruus. Erilaisia tilavariaatioita on tässä tapauksessa 2^N kappaletta. Merkitsemme niitä kuitenkin edellä olevalla tavalla merkinnän ymmärrettävyyden helpottamiseksi.

Prosessin siirtymätodennäköisyydet ovat

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Y(u) = (k_1, \dots, k_N) \mid Y(t) = (l_1, \dots, l_N)) \\ &\qquad = \prod_{j=1}^{N} \mathbf{P}(T_{x_j+u} = k_j \mid T_{x_j+t} = l_j), \end{aligned} \tag{10.1}$$

jossa $0 \leqslant t \leqslant u$ ja $k_j, l_j \in \{0, 1\}$. Toisin sanoen siis todennäköisyys, että prosessi siirtyy aikavälillä $(t, u]$ tilasta Y(t) tilaan Y(u), saadaan tulona jokaisen vakuutetun vastaavasta siirtymätodennäköisyydestä samalla aikavälillä. Tämä yhtäsuuruus seuraa vakuutettujen elinaikojen riippumattomuudesta.

<u>Markov-prosessin oletukset</u> [2]

1) Markov-ominaisuus tarkoittaa sitä, että Markov-prosessi unohtaa aikaisemmin tapahtuneen. Toisin sanoen se, mitä tapahtuu tulevaisuudessa, riippuu ainoastaan siitä, missä tilassa prosessi on tällä hetkellä. Ei siis lainkaan siitä, kuinka nykyiseen tilaan on päädytty.

$$\mathbf{P}(Y(u) = k \mid \sigma(Y(s), s \leqslant t) = \mathbf{P}(Y(u) = k \mid \sigma(Y(t)) \tag{10.2}$$

[2] Dickson et al., Nyrhinen

2) Olkoon Δ mikä tahansa pieni positiivinen aikaväli. Funktiota $g(\Delta)$ kutsutaan $o(\Delta)$:ksi, mikäli

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{g(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Tällöin

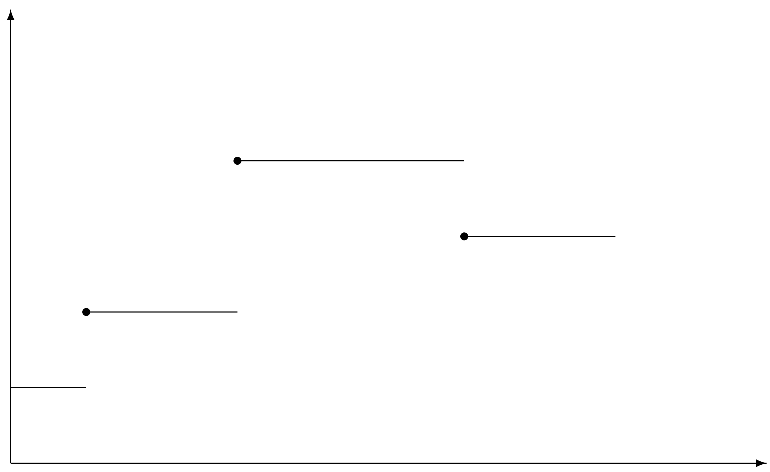
$$\mathbf{P}(\text{kaksi tai useampi siirtymä aikavälin} \quad \Delta \quad \text{kuluessa}) = o(\Delta).$$

Tämä tarkoittaa siis sitä, että todennäköisyys, että pienellä aikavälillä tapahtuisi enemmän kuin yksi siirtymä tilasta toiseen, on pieni.

3) Oikealta jatkuvuus Jokaisella $t \geq 0$, on olemassa sellainen $k \in E$, että

$$\lim_{s \to t+} Y(s) = Y(t)$$

Oikealta jatkuvuus on helppo käsittää alla olevan kuvan avulla.



4) Vasemman puoleiset raja-arvot Jokaisella $t \geq 0$ on olemassa vasemman puoleinen raja-arvo

$$\lim_{s \to t-} Y(s).$$

5) Kaikki siirtymätodennäköisyydet ovat positiivisia

$$\mathbf{P}(Y(t) = j \mid Y(u) = k) \geqslant 0 \quad \forall 0 \leqslant t \leqslant u, \quad j, k \in E.$$

6) Siirtymätodennäköisyyksien summa on yksi. Toisin sanoen varmasti aikavälillä $(t,u]$ joko siirrytään johonkin toiseen tilaan tilasta Y(t) tai pysytään tilassa Y(t).

$$\sum_{k\in E}\mathbf{P}(Y(t)=j \mid Y(u)=k)=1 \quad \forall 0\leqslant t\leqslant u, \quad j\in E.$$

7) Chapman-Kolmogorov -yhtälö

$$\sum_{m\in E}\mathbf{P}(Y(s)=m \mid Y(t)=k)\mathbf{P}(Y(u)=j \mid Y(s)=m)$$
$$=\mathbf{P}(Y(u)=j \mid Y(t)=k)=p_{kj}(t,u) \quad \forall 0\leqslant t<s\leqslant u, \quad k,j\in E.$$

10.1 Intensiteettimalli

Tarkastellaan tässä kappaleessa kahden vakuutetun mallia. Merkintöjen helpottamiseksi, olkoon Markov -prosessi

$$Y(t)=\sum_{j=1}^{2} j\mathbf{1}(T_{x_j}\leq t),$$

jossa siis $Y(t)\in E=\{0,1,2,3\}$.

Merkitään

$$p_{kj}(t,u)=\mathbf{P}(Y(u)=j \mid Y(t)=k) \tag{10.3}$$

Oletetaan nyt, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{\Delta\to 0+}\frac{p_{kj}(t,t+\Delta)}{\Delta}=\mu_{kj}(t). \tag{10.4}$$

Funktioita μ_{kj} kutsutaan siirtymäintensiteeteiksi. Pysyvyysintensiteetit μ_{jj} määritellään seuraavasti

$$\mu_{jj}(t)=-\sum_{k\neq j}\mu_{jk}(t).$$

Lause 10.1. *(Nyrhinen) Oletetaan, että siirtymäintensiteetit μ_{jk} ovat jatkuvia. Tällöin*

$$\frac{d}{du}p_{kj}(t,u)=\sum_{m\in E}p_{km}(t,u)\mu_{mj}(u) \tag{10.5}$$

ja

$$\frac{d}{du}p_{kj}(t,u)=-\sum_{m\in E}\mu_{km}(u)p_{mj}(t,u). \tag{10.6}$$

Nämä yhtälöt ovat niin kutsutut Kolmogorovin forward- ja backward-yhtälöt.

Todistus Olkoon $\Delta > 0$. Tällöin saadaan Markov-prosessin oletuksien kohdan 7 perusteella yhtälö

$$\begin{aligned}
&p_{kj}(t, u + \Delta) \\
&= \textstyle\sum_{m \in E} p_{km}(t, u) p_{mj}(u, u + \Delta) \\
&= \textstyle\sum_{\substack{m \in E \\ m \neq k}} p_{km}(t, u) \mu_{mk}(u) \Delta \\
&+ p_{kj}(t, u) \Big[1 + \mu_{kk}(u) \Delta \Big] + o(\Delta)
\end{aligned}$$

Ja edelleen järjestelemällä termit toisin ja jakamalla puolittain Δ:lla saadaan haluttu yhtälö

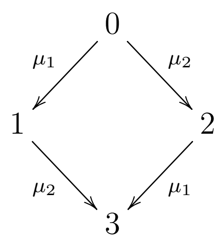
$$\frac{d}{du} p_{kj}(t, u) = \sum_{m \in E} p_{km}(t, u) \mu_{mj}(u).$$

Jälkimmäisen yhtälön todistus on vastaavanlainen, joten sivuutamme sen.$\square$

Tässä kappaleessa olemme merkintöjen lyhentämiseksi käyttäneet siirtymäintensiteeteille merkintää μ_{kj}, joka kertoo siirtymäintensiteetin tilasta k tilaan j. Käytännössä usean vakuutetun henkivakuutuksissa siirtymäintensiteetit ovat vakuutettujen kuolevuuksia.

10.2 Kuolemanvaravakuutus Markov-prosessina

Tarkastellaan esimerkinomaisesti kahden hengen n-vuotista kuolemanvaravakuutusta, jota kuvaa alla oleva kaavio



Kun oletetaan, että siirtymäintensiteetit $\mu_1, \mu_2 > 0$ ja lähtötila on 0, niin vastaavat forward-yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}
&dp_{00}(0, u) = p_{00}(0, u)\mu_{00}(u)du + p_{01}(0, u)\mu_{10}(u)du \\
&+ p_{02}(0, u)\mu_{20}(u)du + p_{03}(0, u)\mu_{30}(u)du \\
&= p_{00}(0, u)\big[- \mu_{01}(u) - \mu_{02}(u)\big] du \\
&= -p_{00}(0, u)\big[\mu_1(u) + \mu_2(u)\big] du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&dp_{01}(0, u) = p_{00}(0, u)\mu_{01}(u)du + p_{01}(0, u)\mu_{11}(u)du \\
&+ p_{02}(0, u)\mu_{21}(u)du + p_{03}(0, u)\mu_{31}(u)du \\
&= p_{00}(0, u)\mu_{01}(u)du - p_{01}(0, u)\mu_{13}(u)du \\
&= p_{00}(0, u)\mu_1(u)du - p_{01}(0, u)\mu_2(u)du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&dp_{02}(0,u) = p_{00}(0,u)\mu_{02}(u)du + p_{01}(0,u)\mu_{12}(u)du\\
&+p_{02}(0,u)\mu_{22}(u)du + p_{03}(0,u)\mu_{32}(u)du\\
&= p_{00}(0,u)\mu_{02}(u)du - p_{02}(0,u)\mu_{23}(u)du\\
&= p_{00}(0,u)\mu_2(u)du - p_{02}(0,u)\mu_1(u)du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&dp_{03}(0,u) = p_{00}(0,u)\mu_{03}(u)du + p_{01}(0,u)\mu_{13}(u)du\\
&+p_{02}(0,u)\mu_{23}(u)du + p_{03}(0,u)\mu_{33}(u)du\\
&= p_{01}(0,u)\mu_{13}(u)du + p_{02}(0,u)\mu_{23}(u)du\\
&-p_{03}(0,u)(\mu_{13}(u) + \mu_{23}(u))du\\
&= p_{01}(0,u)\mu_2(u) + p_{02}(0,u)\mu_1(u)\\
&-p_{03}(u)(\mu_2(u) + \mu_1(u))
\end{aligned}
$$

Ratkaisemalla differentiaaliyhtälöryhmä saadaan

$$
\begin{cases}
p_{00}(0,u) = e^{-\int_0^u(\mu_1(s)+\mu_2(s))ds}\\
p_{01}(0,u) = e^{-\int_0^u \mu_2(s)ds}(1-e^{-\int_0^u \mu_1(s)ds}) = \mu_1(u)e^{-\int_0^u(\mu_1(s)+\mu_2(s))ds}\\
p_{02}(0,u) = e^{-\int_0^u \mu_2(s)ds}(1-e^{-\int_0^u \mu_2(s)ds}) = \mu_2(u)e^{-\int_0^u(\mu_1(s)+\mu_2(s))ds}\\
p_{03}(0,u) = (1-e^{-\int_0^t \mu_1(s)ds})(1-e^{-\int_0^t \mu_2(s)ds})
\end{cases}
$$

Huomion arvoista tässä ratkaisussa on, että verrattuna kappaleen 5 ratkaisuun, saadaan siirtymätodennäköisyys tilasta 0 tilaan 3 Chapman-Kolmogorovin yhtälön perusteella ratkaistua huomattavasti helpommin.

Määrätään lopuksi vakuutuksen nettokertamaksu. Säilytetään sen laskemisen periaate pidetään samana kuin aikaisemminkin eli painotetaan mahdolliset korvauksen vastaavien tapahtumien todennäköisyyksillä.

$$
\begin{aligned}
P = \;& S(0,1)\int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds}p_{01}(0,t)dt + S(1,0)\int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds}p_{02}(0,t)dt\\
&+S(0,0)\int_0^n e^{-\int_0^{t2} \delta(s)ds}p_{03}(0,t)dt\\
= \;& S(0,1)\int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds}\mu_1(t)e^{-\int_0^t(\mu_1(s)+\mu_2(s))ds}dt\\
&+S(1,0)\int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds}\mu_2(t)e^{-\int_0^t(\mu_1(s)+\mu_2(s))ds}dt\\
&+S(0,0)\int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds}(1-e^{-\int_0^t \mu_1(s)ds})(1-e^{-\int_0^t \mu_2(s)ds})dt.
\end{aligned}
$$

Kolmen vakuutetun tapauksessa siirtymäkaavio on seuraavanlainen

$$
\begin{tikzcd}
 & & (1,1,1) \arrow[d] \arrow[ddll] \arrow[ddrr] & & \\
 & & (1,0,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
(0,1,1) \arrow[r] \arrow[ddrr] & (0,0,1) \arrow[dr] & & (1,0,0) \arrow[dl] & (1,1,0). \arrow[l] \arrow[ddll] \\
 & & (0,0,0) & & \\
 & & (0,1,0) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Kuten huomaamme, monimutkaistuu kaavio huomattavasti verrattuna kahden vakuutetun tapaukseen jo nyt, kun vakuutettuja on ainoastaan kolme.

Kolmen tai useamman vakuutetun tapauksessa vakuutuksen nettokertamaksu lasketaan aivan samalla periaatteella kuin kahden vakuutetun tapauksessa. Tällöinkin siis painotetaan maksettavat korvaukset vastaavien tapahtumien todennäköisyyksillä.

11 Lähteet

Dickson D. C.M., Hardy M. R. and Waters H. R. (2009) Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks, Cambridge University Press

Gerber H. U. (1997) Life Insurance Mathematics, Springer

Koistinen P. (2009) Todennäköisyyslaskennan kurssin luentomoniste, Helsingin yliopisto

Nyrhinen H. (2010) Henkivakuutusmatematiikka, Helsingin yliopisto

Pesonen M., Soininen P., Tuominen T. (2000) Henkivakuutusmatematiikka, Suomen vakuutusalan koulutus ja kustannus Oy

Sottinen T. (2006) Todennäköisyysteoria, Helsingin yliopisto

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Kati Suontausta

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Usean vakuutetun henkivakuutukset

Oppiaine — Läroämne — Subject

Soveltava matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Syyskuu 2012	44

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Henkivakuutuksia käsiteltäessä tarkastelun alla on aina vakuutetun jäljellä oleva elinaika, jota kuvaa positiivinen satunnaismuuttuja T. Usean vakuutetun henkivakuutuksen ollessa kyseessä, oletetaan, että vakuutettujen jäljellä olevat elinajat ovat toisistaan riippumattomia. Toinen henkivakuutusten käsittelyssä olennainen käsite on kuolevuus(intensiteetti), jonka avulla saadaan laskettua todennäköisyyksiä vakuutetun jäljellä olevalle elinajalle.

Henkivakuutuslaskennassa vakuutuskaudet voivat olla pitkiä, jopa useita kymmeniä vuosia. Yhtiön kannalta tärkeää on, että vakuutuksen antaminen on kannattavaa. Perusperiaatteena vakuutusyhtiöllä on aina ekvivalenssiperiaate eli vakuutusmaksujen täytyy vastata vakuutetulle maksettavia korvauksia koko vakuutuskauden ajalta. Koska maksuhetkien välillä saattaa olla paljonkin eroa, täytyy vakuutuksien hinnoittelussa ottaa huomioon korkoutuvuus.

Usean vakuutetun elämänvaravakuutuksessa korvaus S maksetaan vakuutuskauden lopussa hetkellä n. Korvauksen suuruus riippuu siitä, ketkä vakuutetuista ovat tällöin elossa. Yleensä ensin tiedetään halutun korvauksen suuruus S. Vakuutusmaksun P suuruus saadaan laskemalla hetkeen nolla diskontatun korvauksen S odotusarvo.

Usean vakuutetun kuolemanvaravakuutuksessa korvaus maksetaan aina kuoleman sattuessa ennen hetkeä n. Korvaushetkiä voi siis olla yhtä monta kuin on vakuutettujakin. Kuolemanvaravakuutuksen osalta periaate on sama kuin elämänvaravakuutuksessakin, mutta käytännössä laskeminen on paljon haastavampaa, johtuen nimenomaan maksuhetkien lukumäärästä ja ajankohdista.

Riskien hallitsemiseksi yhtiölle tärkeä käsite on vastuuvelka, joka on määritelmän mukaan tulevien korvausten ja tulevien vakuutusmaksujen nykyarvojen erotus. Vastuuvelka kertoo siis sen, kuinka paljon yhtiöllä pitää olla varallisuutta, jotta se selviäisi tulevaisuudessa tapahtuvien vakuutustapahtumien seurauksena maksettavista korvauksista. Usean vakuutetun henkivakuutuksia käsiteltäessä vastuuvelan suuruuteen vaikuttaa erityisesti se, missä tilassa prosessi on tarkasteluhetkellä eli ketkä vakuutetuista on elossa ja ketkä kuolleet.

Tärkeä apuväline vastuuvelan suuruuden ennustamisessa on Thielen yhtälö, joka kuvaa vastuuvelan muutoksia. Thielen yhtälöä muodostettaessa tarkastellaan virtauskaavion avulla millaisia muutoksia vakuutettujen tiloissa mahdollisesti tapahtuu pienellä aikavälillä. Mahdollisten tapahtumien seurauksena maksettavien korvausten ja maksujen suuruus painotetaan vastaavan tapahtuman todennäköisyydellä, jolloin summasta saadaan muodostettua Thielen differentiaaliyhtälö.

Usean vakuutetun henkivakuutuksia on mahdollista lähestyä myös Markov -prosessin näkökulmasta. Tällöin oletetaan, että prosessi siirtyy tilasta toiseen intensiteeteillä, joka vastaa vakuutettujen kuolevuuksia. Nyt prosessin siirtymätodennäköisyydet saadaan laskettua näiden avulla ja vakuutuksen nettokertamaksua laskettaessa sovelletaan samaa periaatetta kuin aikaisemminkin. Markovilainen lähestymistapa helpottaa erityisesti kolmen tai useamman hengen vakuutuksien käsittelyä.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Kuolevuus, jäljellä oleva elinaika, nettokertamaksu, vastuuvelka, Thielen yhtälö, Markov -prosessi

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information